Musterlösung zum Übungsblatt 13 der Vorlesung " Grundbegriffe der Informatik"

Aufgabe 13.1

a) Sei $d : \mathcal{T} \to \{[,],0,1\}^*$ die im Skript in Abschnitt 16.5.1 dargestellte Codierung (also injektiv) von Turingmaschinen.

Sei weiterhin $n : \{[,],0,1\}^* \to \{0,1,2,3\}^*$ der (injektive) Homomorphismus, der durch $n(0) = 0, n(1) = 1, n([) = 2, n(]) = 3$ gegeben ist.

Wir definieren nun $c : \mathcal{T} \to \mathbb{N}_0$ durch $\forall T \in \mathcal{T} : c(T) = Num_4(n(d(T)))$.

Da Num_4, n und d injektive Funktionen sind, ist auch c injektiv.

(Hinweis: Es wurde leider ein wenig gemogelt, da Turingmaschinen mit verschiedenen Bezeichnungen der Zustände oder Symbole durch d auf das gleiche Wort abgebildet werden, während eine Umsortierung der Zustände einer Turingmaschine in der Regel zu einem anderen Wort bei der Codierung durch d führt, obwohl die "gleiche" Turingmaschine codiert wird.)

b) Angenommen, es gibt ein $n \in \mathbb{N}_0$, so dass $\bar{d} = h(n)$ gilt. Dann würde gelten $\bar{d}(n) = (h(n))(n)$, was im Widerspruch zur Definition $\bar{d}(n) = 1 - (h(n))(n)$ steht.

c) Wir definieren $null : \mathbb{N}_0 \to \{0,1\}, n \mapsto 0$.

Sei $d : \mathbb{N}_0 \to \{0,1\}$ gegeben durch $\forall T \in \mathcal{T} : d(c(T)) = b(T)$ und $b(n) = 0$ sonst. Die Funktion ist wohldefiniert, da c injektiv ist.

Nach Aufgabenteil b) gibt es eine Funktion $\bar{d} \in \mathcal{F}$, für die es kein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\bar{d} = d(n)$ gilt.

Daraus folgt, dass es kein $T \in \mathcal{T}$ gibt, für das $b(T) = d(c(T)) = \bar{d}$ gilt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 13.2

a) Reflexivität: Für jedes $x \in \mathbb{N}_0$ gilt $|x - x| = 0$. Da 0 keine Primzahl ist, ist R nicht reflexiv.

Symmetrie: Da für alle $x, y \in \mathbb{N}_0$ gilt $|x - y| = |y - x|$, is t R symmetrisch.

Transitivität: Wir betrachten die Zahlen $2, 5, 8$.

Es gilt: $|2 - 5| = 3 \Rightarrow 2R5$ und $|5 - 8| = 3 \Rightarrow 5R8$.

Es gilt aber $|2 - 8| = 6 \Rightarrow (2, 8) \notin R$.

Somit ist R nicht transitiv.

b) Äquivalenzrelation:

Für jedes $x \in \mathbb{N}_0$ gilt x **div** $10 = x$ **div** 10. Somit ist R refelxiv.

Falls für $x, y \in \mathbb{N}_0$ gilt x **div** $10 = y$ **div**, folgt y **div** $10 = x$ **div**. Somit ist R symmetrisch.

Falls für $x, y, z \in \mathbb{N}_0$ gilt x **div** $10 = y$ **div** und y **div** $10 = z$ **div**, so folgt x **div** $10 = z$ **div**.

R ist somit transitiv, und eine Äquivalenzrelation.

Verträglichkeit mit der Addition:

Es gilt $1R8$, aber $(1+1, 8+8) = (2, 16) \notin R$. R ist somit nicht verträglich mit der Addition.

Verträglichkeit mit $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, n \mapsto 2n$:

Es gilt $1R8$, aber $(2 \cdot 1, 2 \cdot 8) = (2, 16) \notin R$. R ist somit nicht verträglich mit f.

Verträglichkeit mit $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, n \mapsto n$ **div** 2:

Seien $x, y \in \mathbb{N}_0$ mit xRy und sei $k = (x \textbf{ div } 10) \textbf{ div} 2 = (y \textbf{ div } 10) \textbf{ div} 2$.

Dann gilt: $x, y \in \{20k, 20k+1, \ldots, 20k+19\}$.

Damit folgt für $x' = x$ **div** 2 und $y' = y$ **div** 2: $x', y' \in \{10k, 10k{+}1, \ldots, 10k{+}9\}$.

Somit ist $(x', y') \in R$, und R ist verträglich mit f.

Aufgabe 13.2

a) Reflexivität: Da für alle $x \in A$ gilt $f(x) = f(x)$, ist R reflexiv.

Symmetrie: Sei $(x, y) \in R \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow f(y) = f(x) \Rightarrow (y, x) \in R$. Somit ist R symmetrisch.

Transitivität: Sei $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R \Rightarrow f(x) = f(y)$ und $f(y) = f(z) \Rightarrow f(x) = f(z)$. Somit ist R transitiv.

Zusammen ergibt sich, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

b) $f : X^* \to \mathcal{G}, x \mapsto f(x)$

mit $\forall w \in X^* : (f(x))(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } xw \in L \\ 0 & \text{falls } xw \notin L \end{cases}.$