

## Musterlösung zum Übungsblatt 2 der Vorlesung “ Grundbegriffe der Informatik”

### Aufgabe 2.1

- a) Nach Definition gilt  $R(abbab) = R(a \cdot bbab) = R(bbab)a = R(bab)ba = R(ab)bba = R(b)abba = R(b\epsilon)abba = R(\epsilon)babba = \epsilon babba = babba$ .
- b) Wir führen eine vollständige Induktion über die Wortlänge  $k$  durch, das heißt, wir zeigen zuerst, dass für alle Wörter  $w$  der Länge  $k = 0$   $|R(w)| = |w|$  gilt und zeigen dann, dass für alle Wörter  $w$  der Länge  $k + 1$   $|R(w)| = |w|$  gilt falls für alle Wörter  $w'$  der Länge  $k$   $|R(w')| = |w'|$  gilt.

**Induktionsanfang:**  $k = 0$ : Das einzige Wort  $w$  der Länge 0 ist das leere Wort  $\epsilon$ .

Da  $R(\epsilon) = \epsilon$  gilt, folgt  $|R(\epsilon)| = |\epsilon|$ .

**Induktionsannahme:** Für ein festes  $k \in \mathbb{N}_0$  gilt: Für alle Wörter  $w$  der Länge  $k$  gilt  $|R(w)| = |w|$ .

**Induktionsschritt:** Wenn für alle Wörter  $w'$  der Länge  $k$  gilt  $|R(w')| = |w'|$ , dann gilt für alle Wörter  $w$  der Länge  $k + 1$   $|R(w)| = |w|$ .

Beweis: Sei  $w$  ein Wort der Länge  $k + 1$ . Dann gibt es ein Wort  $w'$  der Länge  $k$  und ein Zeichen  $x \in A$ , so dass  $w = xw'$  gilt.

Es folgt:  $|R(w)| = |R(xw')| = |R(w')x| = |R(w')| + |x| = |R(w')| + 1$ .

Nach Induktionsannahme gilt  $|R(w')| = |w'|$ , und es folgt:

$$|R(w)| = |w'| + 1 = k + 1 = |w|.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.

- c) Beispielsweise für Wörter  $w \in \{aaaaaaa, aabbbbaa, abaaaba, babbab\}$  gilt  $w = R(w)$ .
- d) Sei  $w = x_0x_1x_2x_3x_4x_5x_6$  ein Wort der Länge 7 so dass  $\forall i \in \mathbb{G}_7 : x_i \in A$  und  $R(w) = w$  gilt.

$$R(x_0x_1x_2x_3x_4x_5x_6) = R(x_1x_2x_3x_4x_5x_6)x_0 = R(x_2x_3x_4x_5x_6)x_1x_0 = R(x_3x_4x_5x_6)x_2x_1x_0 = \dots = x_6x_5x_4x_3x_2x_1x_0.$$

Es gilt nun  $w = R(w)$  genau dann, wenn  $x_0 = x_6, x_1 = x_5$  und  $x_2 = x_4$  gilt. Für  $x_0, x_1, x_2, x_3$  sind somit jeweils alle Zeichen aus  $A$  möglich, während die Zeichen  $x_4, x_5, x_6$  durch die Wahl von  $x_0, x_1, x_2$  festgelegt sind.

Somit gibt es  $|A|^4$  Wörter  $w$  der Länge 7, für die  $R(w) = w$  gilt.

- e) Wie in Aufgabe c) kann man sich überlegen, dass man die ersten  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  Zeichen eines Wortes  $w$  der Länge  $n$ , für das  $R(w) = w$  gelten soll, frei wählen kann, während die restlichen Zeichen nach der Wahl der ersten  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  Zeichen festgelegt sind.

Somit gibt es  $A^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$  Wörter  $w$  der Länge  $n$ , für die  $R(w) = w$  gilt.

(Hinweis: Solche Wörter heißen *Palindrome*.)

- f) Die Abbildung  $R$  bildet ein Wort  $w$  auf dessen Spiegelbild ab;  $R$  spiegelt Wörter.

## Aufgabe 2.2

a) Rechenweg 1:  $x_5 = 5x_4 - 6x_3$

$$\begin{aligned}
 &= 5(5x_3 - 6x_2) - 6(5x_2 - 6x_1) \\
 &= 5(5(5x_2 - 6x_1) - 6(5x_1 - 6x_0)) - 6(5(5x_1 - 6x_0) - 6x_1) \\
 &= 5(5(5(5x_1 - 6x_0) - 6x_1) - 6(5x_1 - 6x_0)) - 6(5(5x_1 - 6x_0) - 6x_1) \\
 &= 5(5(5(5 \cdot 5 - 6 \cdot 2) - 6 \cdot 5) - 6(5 \cdot 5 - 6 \cdot 2)) - 6(5(5 \cdot 5 - 6 \cdot 2) - 6 \cdot 5) \\
 &= 5(5(5 \cdot 13 - 30) - 6 \cdot 13) - 6(5 \cdot 13 - 30) \\
 &= 5(5 \cdot 35 - 6 \cdot 13) - 6 \cdot 35 \\
 &= 5(175 - 78) - 210 \\
 &= 5 \cdot 97 - 210 = 485 - 210 = 275
 \end{aligned}$$

Rechenweg 2:  $x_5 = 5x_4 - 6x_3$

$$\begin{aligned}
 &= 5(5x_3 - 6x_2) - 6x_3 \\
 &= 19x_3 - 30x_2 \\
 &= 19(5x_2 - 6x_1) - 30x_2 \\
 &= 65x_2 - 114x_1 \\
 &= 65(5x_1 - 6x_0) - 114x_1 \\
 &= 211x_1 - 390x_0 = 211 \cdot 5 - 390 \cdot 2 = 1055 - 780 = 275
 \end{aligned}$$

Rechenweg 3:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= 2 \\
 x_1 &= 5 \\
 x_2 &= 5 \cdot 5 - 6 \cdot 2 = 25 - 12 = 13 \\
 x_3 &= 5 \cdot 13 - 5 \cdot 5 = 65 - 30 = 35 \\
 x_4 &= 5 \cdot 35 - 6 \cdot 13 = 175 - 78 = 97 \\
 x_5 &= 5 \cdot 97 - 6 \cdot 35 = 485 - 210 = 275
 \end{aligned}$$

- b) Wir zeigen mit einer Induktion über  $n$ , dass  $\forall n \in \mathbb{N}_0$  gilt:

$$x_n = 2^n + 3^n \wedge x_{n+1} = 2^{n+1} + 3^{n+1}.$$

**Induktionsanfang:**  $n = 0$ :

$$x_0 = 2 = 1 + 1 = 2^0 + 3^0$$

$$x_1 = 5 = 2 + 3 = 2^1 + 3^1.$$

Für den Fall  $n = 0$  gilt die Behauptung somit.

**Induktionsannahme:** Für ein festes  $n$  gilt  $x_n = 2^n + 3^n \wedge x_{n+1} = 2^{n+1} + 3^{n+1}$

**Induktionsschritt:** Wenn für ein  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt:

$$x_n = 2^n + 3^n \wedge x_{n+1} = 2^{n+1} + 3^{n+1},$$

dann gilt für  $n + 1$

$$x_{n+1} = 2^{n+1} + 3^{n+1} \wedge x_{n+2} = 2^{n+2} + 3^{n+2}.$$

Beweis: Wenn  $x_n = 2^n + 3^n \wedge x_{n+1} = 2^{n+1} + 3^{n+1}$  gilt, gilt zwangsweise  $x_{n+1} = 2^{n+1} + 3^{n+1}$ .

Wenn  $x_n = 2^n + 3^n \wedge x_{n+1} = 2^{n+1} + 3^{n+1}$  gilt, folgt

$$\begin{aligned} 5x_{n+1} - 6x_n &= 5(2^{n+1} + 3^{n+1}) - 6(2^n + 3^n) \\ &= 5 \cdot 2^{n+1} + 5 \cdot 3^{n+1} - 3 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 3^{n+1} \\ &= 2 \cdot 2^{n+1} + 3 \cdot 3^{n+1} = 2^{n+2} + 3^{n+2}. \end{aligned}$$

Wegen  $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$  folgt  $x_{n+2} = 2^{n+2} + 3^{n+2}$ .

Somit gilt für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ :

$$x_n = 2^n + 3^n \wedge x_{n+1} = 2^{n+1} + 3^{n+1},$$

und insbesondere gilt für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ :  $x_n = 2^n + 3^n$ , wie zu beweisen war.

c) In diesem Fall gilt  $\forall n \in \mathbb{N}_0 : x_n = 3^n - 2^n$ .

Dies kann man ebenso wie in Teilaufgabe b) nachrechnen.

## Aufgabe 2.2

a)  $L_1 = L_0 \cup \{awb \mid w \in L_0\} = \{\epsilon\} \cup \{a\epsilon b\} = \{\epsilon, ab\}$

b)  $L_2 = \{\epsilon, ab, aabb\}$ ,  $L_3 = \{\epsilon, ab, aabb, aaabbb\}$ ,  $L_4 = \{\epsilon, ab, aabb, aaabbb, aaaabbbb\}$ .

c)  $L_n = \{a^k b^k \mid 0 \leq k \leq n\}$