Willkommen zur ersten Saalübung!

0. Relationen: Ist die Relation R über

$\{$Hörende dieser Vorlesung$\} \times \{$Tutorien$\}$

mit $(Student, Tutorium) \in R \iff Student$ ist für $Tutorium$ eingetragen

linkstotal?

1. Logik:

Was ist der Zusammenhang zwischen den Formeln

$A \Rightarrow \neg B$

und

$A \wedge B$?

A	B	$A \Rightarrow \neg B$	$A \wedge B$

A	B	$A \Rightarrow \neg B$	$A \wedge B$
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

A	B	$A \Rightarrow \neg B$	$A \wedge B$
0	0	1	
0	1	1	
1	0	1	
1	1	0	

A	B	$A \Rightarrow \neg B$	$A \wedge B$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Zusammenhang: Genau eine der beiden Aussagen ist immer wahr.

Was ist der Zusammenhang zwischen den Formeln

$(\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg C)$

und

$\neg C \vee (A \wedge B)$?

A	B	C	$(\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg C)$	$\neg C \vee (A \wedge B)$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1

Zusammenhang: Kein Zusammenhang, Wahrheitswerte unabhängig von einander.

Alle Menschen sind sterblich.
Sokrates ist ein Mensch.
Also ist Sokrates sterblich.

M sei Menge aller Menschen, S Menge aller sterblichen “Dinge”.

Formalisieren?

$$\forall m \in M : m \in S$$
$$s \in M$$
$$\Rightarrow s \in S$$

“Alle Informatikstudenten verbringen täglich mindestens fünf Stunden vor dem Computer.”

Was muss ich tun, um diese Aussage zu widerlegen?

Allgemein und formal:

$$\neg(\forall x \in X : A) = \exists x \in X : \neg A$$

$$\neg(\exists x \in X : A) = \forall x \in X : \neg A$$

Formale Definition von Funktion $f : A \to B$:

$\forall x : x \in f \Rightarrow x \in A \times B \wedge$
$\forall a \in A \exists b \in B : (a, b) \in f \wedge$
$\forall a \in A \forall b \in B \forall b' \in B : ((a, b) \in f \wedge (a, b') \in f) \Rightarrow b = b'$

Wichtig: Quantoren vorne!

Wir definieren für eine Funktion $f : A \Rightarrow B$:

$\forall a \in A : \forall b \in B : f(a) = b \iff (a, b) \in f$.

Wir definieren $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$.

Definition von f:

$f : A \to B$
$a \mapsto f(a) \leftarrow$ (Hier Definition einsetzen, z.B. $2a$)

$f : A \to B$ mit $\forall a \in A : f(a) = 2a$

$\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} : m > n$

$\exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : m > n$

Erste Aussage ist richtig.

Zweite Aussage besagt, dass es eine größte natürlich Zahl gibt.

$\Rightarrow$ Reihenfolge der Quantoren ist wichtig!

2.0 “Beweisen Sie!”

Wann ist ein Beweis fertig?

Beispiel: Ich habe A gezeigt und $A \Rightarrow B$ und behaupte jetzt, dass B gilt.

“Könnten Sie nochmal diesen letzten Schritt erklären?”

“Müssten da nicht noch eigentlich Schritte dazwischen liegen?”

$\rightarrow$ Lewis Caroll, “Was die Schildkröte zu Achilles sagte”.

Implikation anzuwenden muss nicht mehr bewiesen werden!

Wo ist die “Genauigkeitsgrenze”?

Ist es offensichtlich, dass $|f(A)| \leq |A|$ gilt?

Deshalb: Ein paar Tatsachen, die Sie ohne Beweis verwenden dürfen!

2. Mengenlehre

Was bedeutet $|A| = |B|$?

2. Mengenlehre

Was bedeutet $|A| = |B|$?

Es gibt bijektive Abbildung von A nach B!

Was bedeutet $|A| = n$?

A enthält so viele Elemente wie die Menge der ersten n Zahlen.

$\Rightarrow$ Es gibt bijektive Abbildung von $\mathbb{G}_n$ nach A.

Es gelte $A \cap B = \{\}$; A und B seien endliche Mengen.

Dann gilt $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Offensichtlich!

Beweis?

$n = |A|, m = |B|$

$\exists f_A : \mathbb{G}_n \to A$, die bijektiv ist.
$\exists f_B : \mathbb{G}_m \to B$, die bijektiv ist.

Definiere $f_{A\cup B} : \mathbb{G}_{n+m} \to A \cup B$,

$$k \mapsto \begin{cases} f_A(k) & \text{falls } k < n \\ f_B(k-n) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zu zeigen: $f_{A\cup B}$ is totale, injektive, surjektive Funktion.

Mit $A \cap B = \{\} \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$ kann man beweisen:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Hinweis: Die Feststellung, dass das für $A \cap B = \{\}$ stimmt, reicht nicht!

Mit $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ kann man beweisen:

- $|A \cup B| \leq |A| + |B|$

- $|f(A)| \leq |A|$

Sei $f : A \rightarrow B$ eine Funktion.

Dann gilt:

$$\forall a \in A \forall a' \in A : f(a) \neq f(a') \Rightarrow a \neq a'$$

Insbesondere: Wenn A und B Mengen sind, gilt

$$|A| \neq |B| \Rightarrow A \neq B$$