Willkommen zur sechsten Saalübung

Aufgabe 5.1

a) Kontextfreie Grammatik $G = (N, \{a, b\}, S, P)$, so dass $L(G)$ die Sprache aller Palindrome über $\{a, b\}$ ist.

Aufgabe 5.1

a) Kontextfreie Grammatik $G = (N, \{a, b\}, S, P)$, so dass $L(G)$ die Sprache aller Palindrome über $\{a, b\}$ ist.

$N = \{S\}, P = \{S \to aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \epsilon\}$

Aufgabe 5.1

b) Ableitung von $baaab$ aus S.

$N = \{S\}, P = \{S \rightarrow aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \epsilon\}$

Aufgabe 5.1

b) Ableitung von $baaab$ aus S.

$N = \{S\}, P = \{S \rightarrow aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \epsilon\}$

$S \Rightarrow bSb \Rightarrow baSab \Rightarrow baaab$

Aufgabe 5.1

c) Ableitung von $abaaaba$ aus S.

$N = \{S\}, P = \{S \to aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \epsilon\}$

Aufgabe 5.1

c) Ableitung von $baaab$ aus S.

$N = \{S\}, P = \{S \rightarrow aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \epsilon\}$

$S \Rightarrow aSa \Rightarrow abSba \Rightarrow abaSaba \Rightarrow abaaaba$

Aufgabe 5.1

d) Beweisen, dass G jedes Palindrom erzeugt.

$N = \{S\}, P = \{S \rightarrow aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \epsilon\}$

Aufgabe 5.1

d) Beweisen, dass G jedes Palindrom erzeugt.

$N = \{S\}, P = \{S \rightarrow aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \epsilon\}$

Induktion:

Induktionsanfang: ϵ, a, b sind ableitbar aus S.

Aufgabe 5.1

d) Beweisen, dass G jedes Palindrom erzeugt.

$N = \{S\}, P = \{S \to aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \epsilon\}$

Induktion:

Induktionsannahme: Für festes k sind alle Palindrome der Länge k und $k+1$ ableitbar aus S.

Aufgabe 5.1

d) Beweisen, dass G jedes Palindrom erzeugt.

$N = \{S\}, P = \{S \rightarrow aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \epsilon\}$

Induktion:

Induktionsschritt: Alle Palindrome der Länge $k+1$ und $k+2$ sind ableitbar.

Palindrome der Länge $k+1$: Gilt nach Induktionsannahme.

Aufgabe 5.1

d) Beweisen, dass G jedes Palindrom erzeugt.

$N = \{S\}, P = \{S \to aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \epsilon\}$

Palindrome der Länge $k+2$: $w = aw'a$ oder $w = bw'b$.

w' ist ebenfalls Palindrom, hat Länge k

$\Rightarrow$ w' ableitbar aus S.

Aufgabe 5.1

d) Beweisen, dass G jedes Palindrom erzeugt.

$N = \{S\}, P = \{S \to aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \epsilon\}$

Palindrome der Länge $k+2$: $w = aw'a$ oder $w = bw'b$.

$S \Rightarrow aSa \Rightarrow^* aw'a$

$S \Rightarrow bSb \Rightarrow^* bw'b$

Aufgabe 5.2

$S \longrightarrow aSb \mid bSa \mid SS \mid \epsilon$

a) $w \in L(G) \Rightarrow N_a(w) = N_b(w)$.

Aufgabe 5.2

$S \rightarrow aSb \mid bSa \mid SS \mid \epsilon$

a) $w \in L(G) \Rightarrow N_a(w) = N_b(w)$.

Alle aus S ableitbaren Wörter w erfüllen $N_a(w) = N_b(w)$.

In 0 Schriten abgeleitet: $N_a(S) = N_b(S) = 0$.

Aufgabe 5.2

$S \rightarrow aSb \mid bSa \mid SS \mid \epsilon$

a) $w \in L(G) \Rightarrow N_a(w) = N_b(w)$.

Induktionsannahme: Alle aus S in k Schritten ableitbaren Wörter w erfüllen $N_a(w) = N_b(w)$.

Aufgabe 5.2

$S \rightarrow aSb \mid bSa \mid SS \mid \epsilon$

a) $w \in L(G) \Rightarrow N_a(w) = N_b(w)$.

In $k+1$ Schritten:

Stimmt für Ersetzungen $S \rightarrow SS \mid \epsilon$.

Aufgabe 5.2

$S \rightarrow aSb \mid bSa \mid SS \mid \epsilon$

a) $w \in L(G) \Rightarrow N_a(w) = N_b(w)$.

In $k+1$ Schritten:

Stimmt für Ersetzungen $S \rightarrow aSb \mid bSa$.

Aufgabe 5.2

$S \longrightarrow aSb \mid bSa \mid SS \mid \epsilon$

b) $N_a(w) = N_b(w) \Rightarrow w \in L(G)$.

Aufgabe 5.2

$S \longrightarrow aSb \mid bSa \mid SS \mid \epsilon$

b) $N_a(w) = N_b(w) \Rightarrow w \in L(G)$.

Induktionsanfang: Gilt für ϵ.

Aufgabe 5.2

$S \rightarrow aSb \mid bSa \mid SS \mid \epsilon$

b) $N_a(w) = N_b(w) \Rightarrow w \in L(G)$.

Induktionsannahme: Gilt für alle Wörter, die **höchstens** die Länge k haben.

Aufgabe 5.2

$S \to aSb \mid bSa \mid SS \mid \epsilon$

b) $N_a(w) = N_b(w) \Rightarrow w \in L(G)$.

Induktionsschritt: Gilt dann auch für alle Wörter, die **höchstens** die Länge $k+1$ haben.

Einziger interessanter Fall: $|w| = k+1$.

Aufgabe 5.2

$S \to aSb \mid bSa \mid SS \mid \epsilon$

b) $N_a(w) = N_b(w) \Rightarrow w \in L(G)$.

$w = bw'a$ oder $w = aw'b$:

w' nach Induktionsannahme ableitbar.

$S \Rightarrow aSb \Rightarrow^* aw'b$.

Aufgabe 5.2

$S \to aSb \mid bSa \mid SS \mid \epsilon$

b) $N_a(w) = N_b(w) \Rightarrow w \in L(G)$.

$w = bw'b$ oder $w = aw'a$:

$\exists w_1 \exists w_2 : w_1 w_2 = w \land \forall i \in \{1, 2\} : N_a(w_i) = N_b(w_i)$.

Aufgabe 5.2

$S \rightarrow aSb \mid bSa \mid SS \mid \epsilon$

b) $N_a(w) = N_b(w) \Rightarrow w \in L(G)$.

w_1, w_2 ableitbar nach Induktionsvoraussetzung.

$S \Rightarrow SS \Rightarrow^* w_1 S \Rightarrow^* w_1 w_2 = w$.

Aufgabe 5.3

aRb gilt, wenn a ein Teiler von b ist.

aSb gilt, wenn $ggT(a, b) = 1$ gilt.

a) $S \circ R$ angeben.

Aufgabe 5.3

aRb gilt, wenn a ein Teiler von b ist.

aSb gilt, wenn $ggT(a, b) = 1$ gilt.

a) $S \circ R$ angeben.

$S \circ R = S$

Aufgabe 5.3

aRb gilt, wenn a ein Teiler von b ist.

aSb gilt, wenn $ggT(a, b) = 1$ gilt.

b) $S \circ R$ nachrechnen.

Aufgabe 5.3

aRb gilt, wenn a ein Teiler von b ist.

aSb gilt, wenn $ggT(a, b) = 1$ gilt.

b) $S \circ R$ nachrechnen.

$(a, b) \in S \Rightarrow ggT(a, b) = 1 \wedge a$ teilt a.

$c = a$: $(a, c) \in R \wedge (c, b) \in S \Rightarrow (a, b) \in S \circ R$.

Aufgabe 5.3

aRb gilt, wenn a ein Teiler von b ist.

aSb gilt, wenn $ggT(a,b) = 1$ gilt.

b) $S \circ R$ nachrechnen.

$(a,b) \in S \circ R \Rightarrow \exists c : ggT(c,b) = 1 \wedge a$ teilt c.

Jeder gemeinsame Teiler von a und b ist somit gemeinsamer Teiler von c und b.

$ggT(a,b) = 1 \Rightarrow (a,b) \in S$.

Aufgabe 5.3

aRb gilt, wenn a ein Teiler von b ist.

aSb gilt, wenn $ggT(a, b) = 1$ gilt.

c) $R \circ S$ angeben.

Aufgabe 5.3

aRb gilt, wenn a ein Teiler von b ist.

aSb gilt, wenn $ggT(a,b) = 1$ gilt.

c) $R \circ S$ angeben.

$R \circ S = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

Aufgabe 5.3

aRb gilt, wenn a ein Teiler von b ist.

aSb gilt, wenn $ggT(a,b) = 1$ gilt.

d) $R \circ S$ nachrechnen.

Aufgabe 5.3

aRb gilt, wenn a ein Teiler von b ist.

aSb gilt, wenn $ggT(a,b) = 1$ gilt.

d) $R \circ S$ nachrechnen.

$(a,b) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, $c = 1$:

$c = 1 : (a,c) \in S \wedge (c,b) \in R \Rightarrow (a,b) \in R \circ S$.