Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 3

Aufgabe 3.1 (1+1+2 Punkte)
Es sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Beschreiben Sie unter Benutzung nur der Symbole {, }, a, b, ε, $\cup$, * und $^+$, sowie runde Klammer auf, runde Klammer zu und Komma, die folgenden formalen Sprachen:

a) die Menge aller Wörter über A, die das Teilwort ab enthalten;

b) die Menge aller Wörter über A, deren vorletztes Zeichen ein b ist;

c) die Menge aller Wörter über A, in denen nirgends zwei b's unmittelbar hintereinander vorkommen.

Lösung 3.1

a) $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\{\mathtt{ab}\}\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$

b) $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\{\mathtt{b}\}(\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\})$

c) $\{\mathtt{a}, \mathtt{ba}\}^*\{\mathtt{b}, \varepsilon\}$

Aufgabe 3.2 (2+3+2 Punkte)
Es seien L_1, L_2 beliebige formale Sprachen. Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) $L_1 \subseteq L_1' \wedge L_2 \subseteq L_2' \Rightarrow L_1 \cdot L_2 \subseteq L_1' \cdot L_2'$

b) $L_1 \subseteq L_2 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 : L_1^n \subseteq L_2^n$
(Hinweis: vollständige Induktion)

c) $L_1 \subseteq L_2 \Rightarrow L_1^* \subseteq L_2^*$

Lösung 3.2

a) Wir nehmen an, es gilt $L_1 \subseteq L_1' \wedge L_2 \subseteq L_2'$.
Wir wählen ein beliebiges aber festes $w \in (L_1 \cdot L_2)$.
Dann existieren $w_1 \in L_1$ und $w_2 \in L_2$ mit $w = w_1 \cdot w_2$.
Da $L_1 \subseteq L_1' \wedge L_2 \subseteq L_2'$ ist auch $w_1 \in L_1' \wedge w_2 \in L_2'$; also $w_1 \cdot w_2 \in L_1' \cdot L_2'$.
Also gilt $L_1 \cdot L_2 \subseteq L_1' \cdot L_2'$

b) **Induktionsanfang:** $n = 0$**:** Nach Definition gilt $L_1^0 \subseteq L_2^0$, da $\{\epsilon\} \subseteq \{\epsilon\}$. $\surd$

Induktionsvoraussetzung: Für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ gelte

$L_1 \subseteq L_2 \Rightarrow L_1^n \subseteq L_2^n$.

Induktionsschluss: Wir zeigen, dass dann auch $L_1^{n+1} \subseteq L_2^{n+1}$ gelten muss.

$$\begin{aligned} L_1^{n+1} &= L_1^n \cdot L_1 \\ &\subseteq L_1^n \cdot L_2 && \text{nach Vor. und Teilaufgabe a)} \\ &\subseteq L_2^n \cdot L_2 && \text{nach Ind.vor. und Teilaufgabe a)} \\ &= L_2^{n+1} \end{aligned}$$

$\square$

Hinweis: Teilaufgabe a) sollte auf jeden Fall erwähnt/benutzt werden!

Hinweis: Es werden 0,5 Punkte für den IA, 0,5 Punkte für die IV und 2 Punkte für den IS vergeben.

c) Wir nehmen an es gelte $L_1 \subseteq L_2$ und wählen ein beliebiges aber festes $w \in L_1^*$.

Nach Definition existiert ein $n \in \mathbb{N}_0 : w \in L_1^n$

Nach Teilaufgabe b) ist $L_1^n \subseteq L_2^n$, also $w \in L_2^n$

folglich $w \in L_2^*$

Aufgabe 3.3 (2+3+3 Punkte)

Es seien L_1, L_2 beliebige formale Sprachen, mit $L_1, L_2 \subseteq \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$.

a) Geben Sie ein Beispiel für L_1 und L_2 an, so dass $|L_1| = |L_2| = 3$ und $|L_1 \cdot L_2| = |L_1| \cdot |L_2|$ gilt.

Geben Sie zudem alle Elemente von $L_1 \cdot L_2$ an.

b) Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig aber fest. Geben Sie zwei formale Sprachen L_1 und L_2 mit $|L_1| = |L_2| = n$ an, so dass $|L_1 \cdot L_2| = n^2$.

c) Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig aber fest. Geben Sie zwei formale Sprachen L_1 und L_2 mit $|L_1| = |L_2| = n$ an, so dass $|L_1 \cdot L_2| \leq 2n$.

Lösung 3.3

a) $L_1 = \{\mathtt{a}, \mathtt{aa}, \mathtt{aaa}\}$ und $L_2 = \{\mathtt{b}, \mathtt{bb}, \mathtt{bbb}\}$

$L_1 \cdot L_2 = \{\mathtt{ab}, \mathtt{abb}, \mathtt{abbb}, \mathtt{aab}, \mathtt{aabb}, \mathtt{aabbb}, \mathtt{aaab}, \mathtt{aaabb}, \mathtt{aaabbb}\}$

b) $L_1 = \{\mathtt{a}^i \mid 1 \leq i \leq n\}$ und $L_2 = \{\mathtt{b}^i \mid 1 \leq i \leq n\}$

c) $L_1 = \{\mathtt{a}^i \mid 1 \leq i \leq n\}$ und $L_2 = \{\mathtt{a}^i \mid 1 \leq i \leq n\}$
Erläuterung: es ist dann $L_1 \cdot L_2 = \{\mathtt{a}^i \mid 2 \leq i \leq 2n\}$

Aufgabe 3.4 (2 Punkte)
Es sei $L \subseteq A^*$ eine formale Sprache. Beweisen Sie:

$$\varepsilon \in L \Rightarrow L \subseteq L^2$$

Lösung 3.4
Wir nehmen an es gelte $\varepsilon \in L$.
Man wähle ein beliebiges aber festes $w \in L$.
Es ist $w = w \cdot \varepsilon$, und da $w \in L \wedge \varepsilon \in L$ ist $w = w \cdot \varepsilon \in L \cdot L = L^2$.
Also gilt $L \subseteq L^2$.