Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 8

Aufgabe 8.1 (2+3+1+2 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}_+$ sei G_n der ungerichtete Graph $G_n = (V_n, E_n)$ mit $V_n = \mathbb{G}_n$ und $E_n = \{\{x, y\} | x, y \in \mathbb{G}_n \ \wedge \ x \texttt{ mod } 2 = 0 \wedge y \texttt{ mod } 2 = 1\}$.

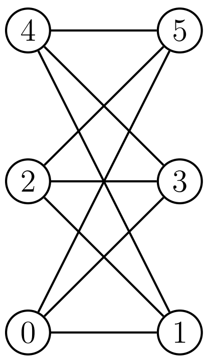
a) Zeichnen Sie G_6.

b) Zeigen Sie, dass es in G_n keine Zyklen der Länge 3 gibt.

c) Geben Sie die Adjazenzmatrix A_5 von G_5 an.

d) Es sei nun $n \geq 2$ und A_n die Adjazenzmatrix von G_n. Für welche $i, j \in V_n$ ist $(A_n^2)_{i,j} \neq 0$?

Lösung 8.1



a)

b) Angenommen es gäbe einen Zyklus der Länge 3 von Knoten x über Knoten y und z. Dann muss gelten: $\{(x, y), (y, z), (z, x)\} \in E_n$

Da es kein x gibt, für das $x \texttt{ mod } 2 = 0 \wedge x \texttt{ mod } 2 = 1$ gilt, enthält G_n keine Schlingen.

Wir betrachten die folgenden 2 Fälle: 1.) x ist gerade bzw. 2.) x ist ungerade

1.) $x \texttt{ mod } 2 = 0 \Rightarrow (x, y) \in E_n \Leftrightarrow y \texttt{ mod } 2 = 1$ und $(z, x) \in E_n \Leftrightarrow z \texttt{ mod } 2 = 1$
Da aber $y \texttt{ mod } 2 = 1 \wedge z \texttt{ mod } 2 = 1 \Rightarrow$ es kann keine Kante zwischen y und z geben und damit auch keinen Zyklus der Länge 3.

2.) $x \texttt{ mod } 2 = 1 \Rightarrow (x, y) \in E_n \Leftrightarrow y \texttt{ mod } 2 = 0$ und $(z, x) \in E_n \Leftrightarrow z \texttt{ mod } 2 = 0$
Da aber $y \texttt{ mod } 2 = 0 \wedge z \texttt{ mod } 2 = 0 \Rightarrow$ es kann keine Kante zwischen y und z geben und damit auch keinen Zyklus der Länge 3.

c)

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d) $(A_n^2)_{i,j} \neq 0$ wenn gilt $(i + j) \texttt{ mod } 2 = 0$ beziehungsweise $i \bmod 2 = j \bmod 2$.

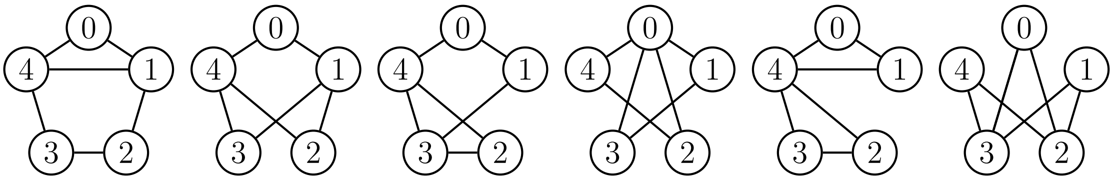
Aufgabe 8.2 (3 Punkte)
Auf der Weihnachtsfeier der Fakultät für Informatik befinden sich 9 Personen. Ist es möglich, dass jede Person genau 5 andere Personen kennt? (Gehen Sie davon aus, dass wenn Person x Person y kennt, Person y auch Person x kennt.) Begründen Sie ihre Antwort.

Lösung 8.2
Nein, es ist nicht möglich.
Wenn man das beschriebene Problem als (ungerichteten) Graphen modelliert, dessen Knotenmenge die 9 Personen sind und eine Menge $\{P_1, P_2\}$ genau dann in der Kantenmenge liegt, wenn sich Person P_1 und Person P_2 kennen, muss jeder Knoten genau 5 Kanten zu anderen Knoten besitzen. Das heisst, jeder Knoten hat den Knotengrad 5. Bei 9 Knoten ergibt sich damit folgendes: $\sum_{i \in V} d(i) = 9 \cdot 5 = 45$
Gleichzeitig gilt in jedem ungerichteten Graphen: $\sum_{i \in V} d(i) = 2 \cdot |E|$ (gezeigt in der letzten Übung). Die Summe der Knotengrade muss also gerade sein. Es kann folglich keinen Graphen geben, bei dem die Summe der Knotengrade 45 ist, und somit ist es nicht möglich, dass jede Person genau 5 andere Personen kennt.

Aufgabe 8.3 (3+3 Punkte)

a) Bestimmen Sie zwei nicht-isomorphe zusammenhängende ungerichtete Graphen $G_1 = (\mathbb{G}_6, E_1)$ und $G_2 = (\mathbb{G}_6, E_2)$ mit 6 Knoten, für die gilt: Jeder Knoten $i \in \mathbb{G}_6$ hat in G_1 den gleichen Knotengrad wie in G_2.

b) Für welche der folgenden sechs Graphen gibt es einen Isomorphismus zu einem der anderen fünf Graphen? Geben Sie jeweils den zugehörigen Isomorphismus an.

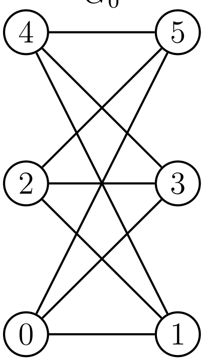


G_0 G_1 G_2 G_3 G_4 G_5

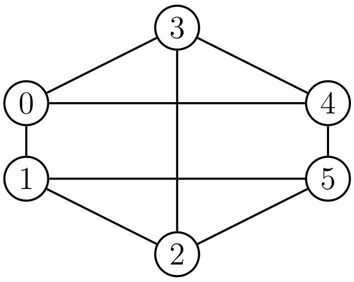
Lösung 8.3

a) Folgende Graphen erfüllen z.B. die geforderte Bedingung:

G_0

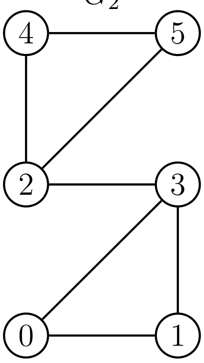


G_1

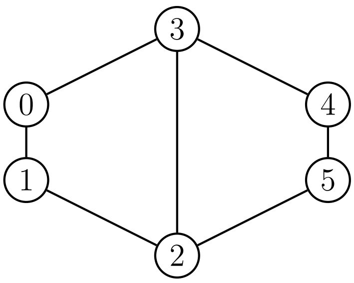


oder auch:

G_2



G_3



G_1 enthält einen Zyklus der Länge 3, der in G_0 nicht existiert.

G_2 enthält einen Zyklus der Länge 3, der in G_3 nicht existiert.

Hinweis: Es gibt noch einige andere Beispiele.

b) Es existieren Isomorphismen zwischen G_0 und G_2, G_1 und G_5, G_3 und G_4. Es wird jeweils angegeben, auf welche Knoten aus dem unteren Graphen die Knoten aus dem oberen Graphen abgebildet werden.

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|c} G_0: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ G_2: & 2 & 3 & 1 & 0 & 4 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{r|c|c|c|c|c} G_0: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ G_2: & 2 & 4 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|c} G_3: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ G_4: & 4 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|c} G_1: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ G_5: & 0 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{r|c|c|c|c|c} G_1: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ G_5: & 0 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{array}$$

Hinweis: Die Lösung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Insbesondere zwischen G_3 und G_4 bestehen auch mehrere Möglichkeiten für einen Isomorphismus.

Aufgabe 8.4 (2 Punkte)

Geben Sie eine 3×3 Matrix A an, die überall Einsen besitzt, bis auf eine Stelle, die nicht auf der Hauptdiagonalen liegt.
Zeigen Sie, dass A nicht die Wegematrix eines Graphen sein kann.

Lösung 8.4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Per Definition enthält eine Wegematrix nur Nullen oder Einsen.
Angenommen die angegebene Matrix besitzt an der Stelle $A_{i,j}$ eine 0, sonst nur Einsen (nach Aufgabenstellung gilt $i \neq j$). Da die Matrix 3 Spalten/Zeilen besitzt, existiert ein $k \notin \{i, j\}$, so dass $A_{i,k} = A_{k,j} = 1$ folgt. Das heisst, es existiert ein Weg von i nach k und ein Weg von k nach j. Im Widerspruch dazu existiert aber kein Weg von i nach j. Folglich kann die Matrix keine Wegematrix sein.

Hinweis: Die Begründung muss nicht (wie hier) für “allgemeines” i, j gezeigt werden. Es reicht, wenn es für die angegebene Matrix A formuliert wird.
Punkteverteilung: Für die Matrix A gibt es 0,5 Punkte und 1,5 Punkte für eine korrekte Begründung.