14. Übung

Karlsruher Institut für Technologie

Matthias Janke, Gebäude 50.34, Raum 249
email: matthias.janke ät kit.edu

Matthias Schulz, Gebäude 50.34, Raum 247
email: schulz ät ira.uka.de

1.) Nerode-Äquivalenz

Definition:
$L \subseteq A^*$ ist beliebige formale Sprache
für alle $w_1, w_2 \in A^*$:

$$w_1 \equiv_L w_2 \Leftrightarrow (\forall w \in A^* : w_1 w \in L \Leftrightarrow w_2 w \in L)$$

Beispielaufgabe:

Es sei $L = \{w \in \{a, b\}^* | w \text{ enthält das Teilwort } bb\}$.
Geben Sie für jede Nerode-Äquivalenzklasse A von L an:

1. Einen Repräsentanten $w_1 \in A$
2. einen regulären Ausdruck für A

Beispielaufgabe:

Es sei $L = \{w \in \{a, b\}^* | w \text{ enthält das Teilwort } bb\}$.
Geben Sie für jede Nerode-Äquivalenzklasse A von L an:

1. Einen Repräsentanten $w_1 \in A$

Erste Überlegung: Wie viele Nerode Äquivalenzklassen gibt es überhaupt?

Beispielaufgabe:

Es sei $L = \{w \in \{a, b\}^* | w$ enthält das Teilwort $bb\}$.
Geben Sie für jede Nerode-Äquivalenzklasse A von L an:

1. Einen Repräsentanten $w_1 \in A$

Erste Überlegung: Wie viele Nerode Äquivalenzklassen gibt es überhaupt?

- “erste” Klasse: $[bb]$, also alle Wörter, die bb von Haus aus enthalten.
-

Beispielaufgabe:

Es sei $L = \{w \in \{a, b\}^* | w \text{ enthält das Teilwort } bb\}$.
Geben Sie für jede Nerode-Äquivalenzklasse A von L an:

1. Einen Repräsentanten $w_1 \in A$

Erste Überlegung: Wie viele Nerode Äquivalenzklassen gibt es überhaupt?

- "erste" Klasse: $[bb]$, also alle Wörter, die bb von Haus aus enthalten.
- $[b]$, $w\ in[b] : wb \in L$, also alle "restlichen" Wörter, die auf b enden.

Beispielaufgabe:

Es sei $L = \{w \in \{a, b\}^* | w$ enthält das Teilwort $bb\}$.
Geben Sie für jede Nerode-Äquivalenzklasse A von L an:

1. Einen Repräsentanten $w_1 \in A$

Erste Überlegung: Wie viele Nerode Äquivalenzklassen gibt es überhaupt?

- "erste" Klasse: $[bb]$, also alle Wörter, die bb von Haus aus enthalten.
- $[b]$, $w\ in[b] : wb \in L$, also alle "restlichen" Wörter, die auf b enden.
- $[a]$, Wörter, die kein bb enthalten und nicht auf b enden.

Beispielaufgabe:

Es sei $L = \{w \in \{a, b\}^* | w \text{ enthält das Teilwort } bb\}$.
Geben Sie für jede Nerode-Äquivalenzklasse A von L an:

1. Einen Repräsentanten $w_1 \in A$
2. einen regulären Ausdruck für A

- $[bb] =$
- $[b] =$
- $[a] =.$

Beispielaufgabe:

Es sei $L = \{w \in \{a, b\}^* | w$ enthält das Teilwort $bb\}$.
Geben Sie für jede Nerode-Äquivalenzklasse A von L an:

1. Einen Repräsentanten $w_1 \in A$
2. einen regulären Ausdruck für A

- $[bb] = \langle (a|b) * bb(a|b)* \rangle$
- $[b] =$
- $[a] =$.

Beispielaufgabe:

Es sei $L = \{w \in \{a, b\}^* | w \text{ enthält das Teilwort } bb\}$.
Geben Sie für jede Nerode-Äquivalenzklasse A von L an:

1. Einen Repräsentanten $w_1 \in A$
2. einen regulären Ausdruck für A

- $[bb] = \langle (a|b) * bb(a|b)* \rangle$
- $[b] = \langle (a|(baa*)) * b \rangle$
- $[a] =.$

Beispielaufgabe:

Es sei $L = \{w \in \{a, b\}^* | w \text{ enthält das Teilwort } bb\}$.
Geben Sie für jede Nerode-Äquivalenzklasse A von L an:

1. Einen Repräsentanten $w_1 \in A$
2. einen regulären Ausdruck für A

- $[bb] = \langle (a|b) * bb(a|b)* \rangle$
- $[b] = \langle (a|(baa*)) * b \rangle$
- $[a] = \langle (a|(baa*))* \rangle$.

und noch eine Beispielaufgabe:
Es sei $L = \{a^n ba^n | n \in \mathbb{N}_0\}$ und $\equiv_L$ die zugehörige Nerode-Äquivalenz.

1. Geben Sie eine Menge an, die für jede Äquivalenzklasse A aus $\{a, b\}^*_{/\equiv_L}$ ein Element $w \in A$ enthält.
2. Geben Sie für jede Äquivalenzklasse $[w]_{\equiv_L} \in \{a, b\}^*_{/\equiv_L}$ die Menge $\{w' \in \{a, b\}^* | ww' \in L\}$ an.
3. Gibt es eine rechtslineare Grammatik G, mit $L(G) = L$? Begründen Sie!

1.) Nerode-Äquivalenz

Es sei $L = \{a^n b a^n | n \in \mathbb{N}_0\}$ und $\equiv_L$ die zugehörige Nerode-Äquivalenz.

1. Geben Sie eine Menge an, die für jede Äquivalenzklasse A aus $\{a, b\}^*_{/\equiv_L}$ ein Element $w \in A$ enthält.

Eine Menge, die aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält, ist
$\{\mathtt{a}^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\mathtt{a}^n\mathtt{b} \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\mathtt{ba}\}$.

Es sei $L = \{a^n b a^n | n \in \mathbb{N}_0\}$ und $\equiv_L$ die zugehörige Nerode-Äquivalenz.

1.
2. Geben Sie für jede Äquivalenzklasse $[w]_{\equiv_L} \in \{a, b\}^*_{/\equiv_L}$ die Menge $\{w' \in \{a, b\}^* | ww' \in L\}$ an.

Eine Menge, die aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält, ist
$\{\mathtt{a}^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\mathtt{a}^n\mathtt{b} \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\mathtt{ba}\}$.

1.) Nerode-Äquivalenz

Es sei $L = \{a^n b a^n | n \in \mathbb{N}_0\}$ und $\equiv_L$ die zugehörige Nerode-Äquivalenz.

1.
2. Geben Sie für jede Äquivalenzklasse $[w]_{\equiv_L} \in \{a, b\}^*_{/\equiv_L}$ die Menge $\{w' \in \{a, b\}^* | ww' \in L\}$ an.

- $\forall n \in \mathbb{N}_0 : w = \mathtt{a}^n \Rightarrow \{w' \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid ww' \in L\} = \{\mathtt{a}^k \mathtt{b} \mathtt{a}^{n+k} \mid k \in \mathbb{N}_0\}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}_0 : w = \mathtt{a}^n \mathtt{b} \Rightarrow \{w' \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid ww' \in L\} = \{\mathtt{a}^n\}$.
- $w = \mathtt{ba} \Rightarrow \{w' \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid ww' \in L\} = \emptyset$.

und noch eine Beispielaufgabe:
Es sei $L = \{a^n b a^n | n \in \mathbb{N}_0\}$ und $\equiv_L$ die zugehörige Nerode-Äquivalenz.

1.
2.
3. Gibt es eine rechtslineare Grammatik G, mit $L(G) = L$? Begründen Sie!

und noch eine Beispielaufgabe:
Es sei $L = \{a^n b a^n | n \in \mathbb{N}_0\}$ und $\equiv_L$ die zugehörige Nerode-Äquivalenz.

1.
2.
3. Gibt es eine rechtslineare Grammatik G, mit $L(G) = L$? Begründen Sie!

Nein!
Da es unendlich viele verschiedene Äquivalenzklassen bezüglich der Nerode-Äquivalenz gibt, kann es keinen endlichen Akzeptor geben, der L erkennt, und damit kann es auch keine rechtslineare Grammatik geben, die L erzeugt.

Zur Erinnerung:
Sei R Äquivalenzrelation und $\square$ eine binäre Operation jeweils auf M.

- R ist mit $\square$ verträglich, wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ und für alle $y_1, y_2 \in M$ gilt:

$$x_1 R x_2 \wedge y_1 R y_2 \Rightarrow (x_1 \square y_1) R (x_2 \square y_2)$$

2.) Verträglichkeit

$x \sim y \iff x \texttt{ div } 23 = y \texttt{ div } 23$

1. Zeigen Sie, dass $\sim$ Äquivalenzrelation ist.
2. Ist $\sim$ verträglich mit Addition? Multiplikation? Division? Subtraktion?
3. Ist $\sim$ verträglich mit Addition von $45, 46, 47$?
4. Ist $\sim$ verträglich mit Division durch $3, 4, 5$?

$x \sim y \iff x \;\texttt{div}\; 23 = y \;\texttt{div}\; 23$

1. Zeigen Sie, dass $\sim$ Äquivalenzrelation ist.

Reflexivität: $x \;\texttt{div}\; 23 = x \;\texttt{div}\; 23$

Symmetrie und Transitivität vererben sich von $=$ (siehe Vorlesung).

2.) Verträglichkeit

$x \sim y \iff x \texttt{ div } 23 = y \texttt{ div } 23$

1.
2. Ist $\sim$ verträglich mit Addition? Multiplikation? Division? Subtraktion?

2.) Verträglichkeit

$x \sim y \iff x \texttt{ div } 23 = y \texttt{ div } 23$

1.
2. Ist $\sim$ verträglich mit Addition? Multiplikation? Division? Subtraktion?

- $11 \sim 12$, aber $11 + 11 = 22 \not\sim 12 + 12 = 24$
- $12 \sim 1$, aber $1 = 1 \cdot 1 \not\sim 144 = 12 \cdot 12$
- $2 \sim 1$, aber $46 = 46 \texttt{ div } 1 \not\sim 23 = 46 \texttt{ div } 2$
- $12 \sim 1$, aber $24 = 25 - 1 \not\sim 13 = 25 - 12$

2.) Verträglichkeit

$x \sim y \iff x \texttt{ div } 23 = y \texttt{ div } 23$

1.
2.
3. Ist $\sim$ verträglich mit Addition von $45, 46, 47$?

2.) Verträglichkeit

$x \sim y \iff x \texttt{ div } 23 = y \texttt{ div } 23$

1.
2.
3. Ist $\sim$ verträglich mit Addition von $45, 46, 47$?

$1 + 45 \not\sim 0 + 45$

$x \sim y \Rightarrow x \texttt{ div } 23 = y \texttt{ div } 23 \Rightarrow x \texttt{ div } 23 + 2 = y \texttt{ div } 23 + 2 \Rightarrow (x + 46) \texttt{ div } 23 = (y + 46) \texttt{ div } 23$

$22 + 47 \not\sim 21 + 47$

2.) Verträglichkeit

1.
2.
3.
4. Ist $\sim$ verträglich mit Division durch $3, 4, 5$?

$$x \texttt{ div } k \not\sim y \texttt{ div } k \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}_0 : x \texttt{ div } k < 23m \wedge y \texttt{ div } k \geq 23m$$

1.
2.
3.
4. Ist $\sim$ verträglich mit Division durch $3, 4, 5$?

$x \texttt{ div } k \not\sim y \texttt{ div } k \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}_0 : x \texttt{ div } k < 23m \wedge y \texttt{ div } k \geq 23m$
$\Rightarrow x \texttt{ div } k \leq 23m - 1 \wedge y \texttt{ div } k \geq 23m$

2.) Verträglichkeit

1.
2.
3.
4. Ist $\sim$ verträglich mit Division durch $3, 4, 5$?

$x \texttt{ div } k \nsim y \texttt{ div } k \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}_0 : x \texttt{ div } k < 23m \wedge y \texttt{ div } k \geq 23m$
$\Rightarrow x \texttt{ div } k \leq 23m - 1 \wedge y \texttt{ div } k \geq 23m$
$\Rightarrow k(x \texttt{ div } k) \leq 23mk - k \wedge y \geq 23mk$

1.
2.
3.
4. Ist $\sim$ verträglich mit Division durch $3, 4, 5$?

$x \ \texttt{div} \ k \not\sim y \ \texttt{div} \ k \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}_0 : x \ \texttt{div} \ k < 23m \wedge y \ \texttt{div} \ k \geq 23m$
$\Rightarrow x \ \texttt{div} \ k \leq 23m - 1 \wedge y \ \texttt{div} \ k \geq 23m$
$\Rightarrow k(x \ \texttt{div} \ k) \leq 23mk - k \wedge y \geq 23mk$
$\Rightarrow k(x \ \texttt{div} \ k) + x \mod k < 23mk \leq y$

2.) Verträglichkeit

1.
2.
3.
4. Ist $\sim$ verträglich mit Division durch $3, 4, 5$?

$$x \texttt{ div } k \not\sim y \texttt{ div } k \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}_0 : x \texttt{ div } k < 23m \wedge y \texttt{ div } k \geq 23m$$
$$\Rightarrow x \texttt{ div } k \leq 23m - 1 \wedge y \texttt{ div } k \geq 23m$$
$$\Rightarrow k(x \texttt{ div } k) \leq 23mk - k \wedge y \geq 23mk$$
$$\Rightarrow k(x \texttt{ div } k) + x \mod k < 23mk \leq y$$
$$\Rightarrow x < 23mk \leq y$$

1.
2.
3.
4. Ist $\sim$ verträglich mit Division durch $3, 4, 5$?

$x \texttt{ div } k \not\sim y \texttt{ div } k \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}_0 : x \texttt{ div } k < 23m \wedge y \texttt{ div } k \geq 23m$
$\Rightarrow x \texttt{ div } k \leq 23m - 1 \wedge y \texttt{ div } k \geq 23m$
$\Rightarrow k(x \texttt{ div } k) \leq 23mk - k \wedge y \geq 23mk$
$\Rightarrow k(x \texttt{ div } k) + x \mod k < 23mk \leq y$
$\Rightarrow x \not\sim y$

1.
2.
3.
4. Ist $\sim$ verträglich mit Division durch $3, 4, 5$?

$x \texttt{ div } k \not\sim y \texttt{ div } k \Rightarrow x \not\sim y$

$\Rightarrow$

$x \sim y \Rightarrow x \texttt{ div } k \sim y \texttt{ div } k$

Gegeben: Menge M, Äquivalenzrelation $R \subseteq M \times M$, Operation $\Box : M \times M$ mit

$$\forall x, y \in M : (x \Box y) R (y \Box x) \qquad \textbf{K}\text{-Regel}$$

Zeigen Sie: Wenn $\forall x, y, z \in M : xRy \Rightarrow (x \Box z) R (y \Box z)$ gilt, ist $\Box$ verträglich mit R.

Gegeben: Menge M, Äquivalenzrelation $R \subseteq M \times M$, Operation $\Box : M \times M$ mit

$$\forall x, y \in M : (x \Box y) R (y \Box x) \qquad \textbf{K}\text{-Regel}$$

Zeigen Sie: Wenn $\forall x, y, z \in M : xRy \Rightarrow (x \Box z) R (y \Box z)$ gilt, ist $\Box$ verträglich mit R.

Zuerst einmal: Überlegen was ich zeigen muss!
Nach Definition der Verträglichkeit:

- $x_1 R x_2 \wedge y_1 R y_2 \Rightarrow (x_1 \Box y_1) R (x_2 \Box y_2)$

Also:

Wähle $x_1, x_2 \in M$ und $y_1, y_2 \in M$ mit $x_1 R x_2$ und $y_1 R y_2$

Was weiss ich aus der Aufgabenstellung?

Also:

Wähle $x_1, x_2 \in M$ und $y_1, y_2 \in M$ mit $x_1 R x_2$ und $y_1 R y_2$

Was weiss ich aus der Aufgabenstellung?
Ich nehme an es gilt:

- $(x_1 \Box y_1) R (x_2 \Box y_1)$
- $(x_1 \Box y_2) R (x_2 \Box y_2)$
- $(y_1 \Box x_1) R (y_2 \Box x_1)$
- $(y_1 \Box x_2) R (y_2 \Box x_2)$

und folgere daraus die Verträglichkeit.

Also:

Wähle $x_1, x_2 \in M$ und $y_1, y_2 \in M$ mit $x_1 R x_2$ und $y_1 R y_2$

Was weiss ich aus der Aufgabenstellung?
Ich nehme an es gilt:

- $(x_1 \Box y_1) R (x_2 \Box y_1)$
- $(x_1 \Box y_2) R (x_2 \Box y_2)$
- $(y_1 \Box x_1) R (y_2 \Box x_1)$
- $(y_1 \Box x_2) R (y_2 \Box x_2)$

und folgere daraus die Verträglichkeit.
Außerdem weiss ich:

$$\forall x, y \in M : (x \Box y) R (y \Box x)$$

Wähle $x_1, x_2 \in M$ und $y_1, y_2 \in M$ mit $x_1 R x_2$ und $y_1 R y_2$

$$(x_1 \Box y_1) R (x_2 \Box y_1)$$

2.) und nochmal Verträglichkeit

Wähle $x_1, x_2 \in M$ und $y_1, y_2 \in M$ mit $x_1 R x_2$ und $y_1 R y_2$

$$\begin{aligned} &(x_1 \Box y_1) R (x_2 \Box y_1) \\ \wedge &(x_2 \Box y_1) R (y_1 \Box x_2) \qquad \textbf{K}\text{-Regel} \end{aligned}$$

2.) und nochmal Verträglichkeit

Wähle $x_1, x_2 \in M$ und $y_1, y_2 \in M$ mit $x_1 R x_2$ und $y_1 R y_2$

$$
\begin{aligned}
&(x_1 \Box y_1) R (x_2 \Box y_1) \\
\wedge &(x_2 \Box y_1) R (y_1 \Box x_2) \qquad \textbf{K}\text{-Regel} \\
\wedge &(y_1 \Box x_2) R (y_2 \Box x_2)
\end{aligned}
$$

2.) und nochmal Verträglichkeit

Wähle $x_1, x_2 \in M$ und $y_1, y_2 \in M$ mit $x_1 R x_2$ und $y_1 R y_2$

$$
\begin{array}{ll}
(x_1 \square y_1) R (x_2 \square y_1) & \\
\wedge (x_2 \square y_1) R (y_1 \square x_2) & \textbf{K}\text{-Regel} \\
\wedge (y_1 \square x_2) R (y_2 \square x_2) & \\
\wedge (y_2 \square x_2) R (x_2 \square y_2) & \textbf{K}\text{-Regel}
\end{array}
$$

2.) und nochmal Verträglichkeit

Wähle $x_1, x_2 \in M$ und $y_1, y_2 \in M$ mit $x_1 R x_2$ und $y_1 R y_2$

$$\begin{aligned} &(x_1 \Box y_1) R (x_2 \Box y_1) && \\ \wedge &(x_2 \Box y_1) R (y_1 \Box x_2) && \textbf{K}\text{-Regel} \\ \wedge &(y_1 \Box x_2) R (y_2 \Box x_2) && \\ \wedge &(y_2 \Box x_2) R (x_2 \Box y_2) && \textbf{K}\text{-Regel} \end{aligned}$$

Also nach Transitivität: $(x_1 \Box y_1) R (x_2 \Box y_2)$.

2.) und nochmal Verträglichkeit

Gegeben: Menge M, Äquivalenzrelation $R \subseteq M \times M$, Operation $\square : M \times M$ mit

$$\forall x, y \in M : (x \square y) R (y \square x)$$

Zeigen Sie: Wenn $\forall x, y, z \in M : xRy \Rightarrow (x \square z) R (y \square z)$ gilt, ist $\square$ verträglich mit R.

Zusatzfrage: Gilt das auch, ohne die Bedingung aus der **K**-Regel: $\forall x, y \in M : (x \square y) R (y \square x)$?

Gegeben: Menge M, Äquivalenzrelation $R \subseteq M \times M$, Operation $\square : M \times M$ mit

$$\forall x, y \in M : (x \square y) R (y \square x)$$

Zeigen Sie: Wenn $\forall x, y, z \in M : xRy \Rightarrow (x \square z) R (y \square z)$ gilt, ist $\square$ verträglich mit R.

Zusatzfrage: Gilt das auch, ohne die Bedingung aus der **K**-Regel: $\forall x, y \in M : (x \square y) R (y \square x)$?

Widerlegen durch Gegenbeispiel:
Wähle $M = \mathbb{N}_0, xRy \Leftrightarrow x - y$ ist durch 3 teilbar, $x \square y = x^y$.

Zeigen Sie: Wenn $\forall x, y, z \in M : xRy \Rightarrow (x \Box z)R(y \Box z)$ gilt, ist $\Box$ verträglich mit R.

Zusatzfrage: Gilt das auch, ohne die Bedingung aus der **K**-Regel: $\forall x, y \in M : (x \Box y)R(y \Box x)$?

Widerlegen durch Gegenbeispiel:
Wähle $M = \mathbb{N}_0, xRy \Leftrightarrow x - y$ ist durch 3 teilbar, $x \Box y = x^y$.
$x_1 = x_2 = 2, \;\; y_1 = 1, y_2 = 4$
$\Rightarrow x_1 R x_2 \wedge y_1 R y_2$

aber: $(2^1, 2^4) \notin R$!

Halbordnungen sind:

- *reflexiv*,
- *transitiv*
- **antisymmetrisch**!

Achtung: antisymmetrisch $\neq$ nicht symmetrisch!

Auch nicht verwechseln:

kleinstes Element vs **minimales** Element!

$(M, \sqsubseteq)$ ist halbgeordnet, $T \subseteq M$

- $x \in T$ heisst *kleinstes* Element, wenn für alle $y \in T$ gilt: $x \sqsubseteq y \wedge x \neq y$
- $x \in T$ heisst *minimales Element*, wenn es kein $x \in T$ gibt: $y \sqsubseteq x \wedge y \neq x$

Auch nicht verwechseln:

kleinstes Element vs minimales Element!

alte Klausuraufgabe:

Geben Sie Menge M mit Halbordnung $\sqsubseteq$ an, so dass M zwei minimale Elemente besitzt, die gleichzeitig auch maximale Elemente sind!

Auch nicht verwechseln:

kleinstes Element vs minimales Element!

alte Klausuraufgabe:

Geben Sie Menge M mit Halbordnung $\sqsubseteq$ an, so dass M zwei minimale Elemente besitzt, die gleichzeitig auch maximale Elemente sind!

- $M = \{x, y\}, \sqsubseteq = \{(x, x), (y, y)\}$

Auch nicht verwechseln:

kleinstes Element vs minimales Element!

weitere Aufgabe:

Geben Sie Menge M mit Halbordnung $\sqsubseteq$ an, so dass in M genau ein minimales Element existiert, aber gleichzeitig kein kleinstes Element!

3.) Halbordnungen

Auch nicht verwechseln:

kleinstes Element vs minimales Element!

weitere Aufgabe:

Geben Sie Menge M mit Halbordnung $\sqsubseteq$ an, so dass in M genau ein minimales Element existiert, aber gleichzeitig kein kleinstes Element!

- $M = \mathbb{Z} \cup \{\mathtt{m}\}$
- $x, y \in \mathbb{Z} : x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x \leq y$
- $\mathtt{m} \sqsubseteq z \Leftrightarrow z \geq 1$

$\cdots$

2

1

$\mathtt{m}$

0

$\dots$

Die Klausur rückt in greifbare Nähe.

Resultat Nachklausur WS09/10:

2.0	2.3	2.7	3	3.3	3.7	4		4.7	5
2	5	6	4	12	10	8		26	12

Unterschätzen Sie die Klausur nicht! ;)

Trotzdem: Schönes Wochenende!