Übung “Grundbegriffe der Informatik”

Karlsruher Institut für Technologie

Matthias Schulz, Gebäude 50.34, Raum 247

email: schulz@ira.uka.de

Matthias Janke, Gebäude 50.34, Raum 249

email: matthias.janke@kit.edu

Verknüpfungen von Mengen

$$L_1 \cdot L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1 \land w_2 \in L_2\}$$

Allgemein: $A \circ B = \{a \circ b \mid a \in A \land b \in B\}$

.

Verknüpfungen von Mengen

$L_1 \cdot L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2\}$

Allgemein: $A \circ B = \{a \circ b \mid a \in A \wedge b \in B\}$

Endliche Mengen A, B: $|A \circ B| \leq |A| \cdot |B|$

.

Verknüpfungen von Mengen

Beispiel Multiplikation:

$\{1,2,3,4,5\} \cdot \{1,2,3,4,5\}$:

.

Verknüpfungen von Mengen

Beispiel Multiplikation:

$\{1, 2, 3, 4, 5\} \cdot \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$\cdot$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	6	8	10
3	3	6	9	12	15
4	4	8	12	16	20
5	5	10	15	20	25

.

Verknüpfungen von Mengen

Beispiel Multiplikation:

$\{1, 2, 3, 4, 5\} \cdot \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$\cdot$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	6	8	10
3	3	6	9	12	15
4	4	8	12	16	20
5	5	10	15	20	25

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 20, 25\}$

25 Einträge, 14 verschiedene Elemente

Verknüpfungen von Mengen

$L^0 = \{\epsilon\}, \forall n \in \mathbb{N}_0 : L^{n+1} = L^n \cdot L$

Allgemein: Falls $\exists e \in M : \forall x \in M : e \circ x = x = x \circ e$:

$M^0 = \{e\}, \forall n \in \mathbb{N}_0 : M^{n+1} = M^n \circ M$.

.

Verknüpfungen von Mengen

Menge M abgeschlossen bezüglich Operation $\circ$:

$\forall x \in M : \forall y \in M : x \circ y \in M$

.

Verknüpfungen von Mengen

Menge M abgeschlossen bezüglich Operation $\circ$:

$\forall x \in M : \forall y \in M : x \circ y \in M$
Kürzer: $\forall x, y \in M : x \circ y \in M$

.

Verknüpfungen von Mengen

Menge M abgeschlossen bezüglich Operation $\circ$:

$\forall x \in M : \forall y \in M : x \circ y \in M$

Kürzer: $\forall x, y \in M : x \circ y \in M$

Noch kürzer: $M \circ M \subseteq M$

.

Verknüpfungen von Mengen

Menge M abgeschlossen bezüglich Operation $\circ$:

$\forall x \in M : \forall y \in M : x \circ y \in M$
Kürzer: $\forall x, y \in M : x \circ y \in M$
Noch kürzer: $M \circ M \subseteq M$
Ganz arg kurz: $M^2 \subseteq M$.

.

Konkatenationsabschluss

Behauptung: $L^+ \cdot L^+ \subseteq L^+$

.

Konkatenationsabschluss

Behauptung: $L^+ \cdot L^+ \subseteq L^+$

Beweis, dass eine Menge Teilmenge einer anderen Menge ist:

- Nimm beliebiges, aber festes Element aus erster Menge.

- Zeige, dass Element auch in zweiter Menge liegen muss.

.

Konkatenationsabschluss

Behauptung: $L^+ \cdot L^+ \subseteq L^+$

$w \in L^+ \cdot L^+$ beliebig, aber fest gewählt.

.

Konkatenationsabschluss

Behauptung: $L^+ \cdot L^+ \subseteq L^+$

$w \in L^+ \cdot L^+$ beliebig, aber fest gewählt.
$\Rightarrow \exists w_1 \in L^+ : \exists w_2 \in L^+ : w = w_1 w_2$

.

Konkatenationsabschluss

Behauptung: $L^+ \cdot L^+ \subseteq L^+$

$w \in L^+ \cdot L^+$ beliebig, aber fest gewählt.
$\Rightarrow \exists w_1 \in L^+ : \exists w_2 \in L^+ : w = w_1 w_2$
$\Rightarrow \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}_+ : \exists w_1 \in L^{n_1} : \exists w_2 \in L^{n_2} : w = w_1 w_2$

.

Konkatenationsabschluss

Behauptung: $L^+ \cdot L^+ \subseteq L^+$

$w \in L^+ \cdot L^+$ beliebig, aber fest gewählt.
$\Rightarrow \exists w_1 \in L^+ : \exists w_2 \in L^+ : w = w_1 w_2$
$\Rightarrow \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}_+ : \exists w_1 \in L^{n_1} : \exists w_2 \in L^{n_2} : w = w_1 w_2$
$\Rightarrow \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}_+ : w \in L^{n_1 + n_2}$

.

Konkatenationsabschluss

Behauptung: $L^+ \cdot L^+ \subseteq L^+$

$w \in L^+ \cdot L^+$ beliebig, aber fest gewählt.
$\Rightarrow \exists w_1 \in L^+ : \exists w_2 \in L^+ : w = w_1 w_2$
$\Rightarrow \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}_+ : \exists w_1 \in L^{n_1} : \exists w_2 \in L^{n_2} : w = w_1 w_2$
$\Rightarrow \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}_+ : w \in L^{n_1 + n_2}$
$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}_+ : w \in L^n$

.

Konkatenationsabschluss

Behauptung: $L^+ \cdot L^+ \subseteq L^+$

$w \in L^+ \cdot L^+$ beliebig, aber fest gewählt.
$\Rightarrow \exists w_1 \in L^+ : \exists w_2 \in L^+ : w = w_1 w_2$
$\Rightarrow \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}_+ : \exists w_1 \in L^{n_1} : \exists w_2 \in L^{n_2} : w = w_1 w_2$
$\Rightarrow \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}_+ : w \in L^{n_1+n_2}$
$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}_+ : w \in L^n$
$\Rightarrow w \in L^+$

.

Konkatenationsabschluss

Behauptung: $L^+ \cdot L^+ \subseteq L^+$

$w \in L^+ \cdot L^+$ beliebig, aber fest gewählt.
$\Rightarrow \exists w_1 \in L^+ : \exists w_2 \in L^+ : w = w_1 w_2$
$\Rightarrow \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}_+ : \exists w_1 \in L^{n_1} : \exists w_2 \in L^{n_2} : w = w_1 w_2$
$\Rightarrow \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}_+ : w \in L^{n_1 + n_2}$
$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}_+ : w \in L^n$
$\Rightarrow w \in L^+$

Daraus folgt $L^+ \cdot L^+ \subseteq L^+$.

.

Konkatenationsabschluss

Feststellung: $\forall n \in \mathbb{N}_+ : (L^+)^n \subseteq L^+$

Details wären zu verräterisch, was das 3. Übungsblatt angeht ...

.

Konkatenationsabschluss

Behauptung: $(L^+)^+ = L^+$

.

Konkatenationsabschluss

Behauptung: $(L^+)^+ = L^+$

Nachweis der Gleichheit von zwei Mengen:

- Zeige, dass linke Menge Teilmenge von rechter Menge ist.

- Zeige, dass rechte Menge Teilmenge von linker Menge ist.

.

Konkatenationsabschluss

Behauptung: $(L^+)^+ = L^+$

(i) $(L^+)^+ \subseteq L^+$:

Sei $w \in (L^+)^+$ beliebig, aber fest gewählt.

.

Konkatenationsabschluss

Behauptung: $(L^+)^+ = L^+$

(i) $(L^+)^+ \subseteq L^+$:

Sei $w \in (L^+)^+$ beliebig, aber fest gewählt.
$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}_+ : w \in (L^+)^n \subseteq L^+$

.

Konkatenationsabschluss

Behauptung: $(L^+)^+ = L^+$

(i) $(L^+)^+ \subseteq L^+$:

Sei $w \in (L^+)^+$ beliebig, aber fest gewählt.
$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}_+ : w \in (L^+)^n \subseteq L^+$
$\Rightarrow w \in L^+$

.

Konkatenationsabschluss

Behauptung: $(L^+)^+ = L^+$

(i) $(L^+)^+ \subseteq L^+$:

Sei $w \in (L^+)^+$ beliebig, aber fest gewählt.
$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}_+ : w \in (L^+)^n \subseteq L^+$
$\Rightarrow w \in L^+$

Daraus folgt $(L^+)^+ \subseteq L^+$.

.

Konkatenationsabschluss

Behauptung: $(L^+)^+ = L^+$

(ii) $L^+ \subseteq (L^+)^+$:

Sei $w \in L^+$ beliebig, aber fest gewählt.

.

Konkatenationsabschluss

Behauptung: $(L^+)^+ = L^+$

(ii) $L^+ \subseteq (L^+)^+$:

Sei $w \in L^+$ beliebig, aber fest gewählt.
$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}_+ : w \in (L^+)^n$ (nämlich $n = 1$)

.

Konkatenationsabschluss

Behauptung: $(L^+)^+ = L^+$

(ii) $L^+ \subseteq (L^+)^+$:

Sei $w \in L^+$ beliebig, aber fest gewählt.
$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}_+ : w \in (L^+)^n$ (nämlich $n = 1$)
$\Rightarrow w \in (L^+)^+$

.

Konkatenationsabschluss

Behauptung: $(L^+)^+ = L^+$

(ii) $L^+ \subseteq (L^+)^+$:

Sei $w \in L^+$ beliebig, aber fest gewählt.
$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}_+ : w \in (L^+)^n$ (nämlich $n = 1$)
$\Rightarrow w \in (L^+)^+$

Daraus folgt $L^+ \subseteq (L^+)^+$.

.

Konkatenationsabschluss

Behauptung: $(L^+)^+ = L^+$

Aus (i) und (ii) folgt $(L^+)^+ = L^+$

.

Konkatenationsabschluss

Es gilt: $L^* \cdot L^* = L^*$

Dann einfach zu zeigen: $\forall n \in \mathbb{N}_+ : (L^*)^n = L^*$

$\Rightarrow (L^*)^* = L^*$

.

Widerspruchsbeweise

$L \subseteq A^*$

Was ist $L \cdot \{\}$?

.

Widerspruchsbeweise

Was ist $L \cdot \{\}$?

Annahme: $L \cdot \{\} \neq \{\}$.

.

Widerspruchsbeweise

Was ist $L \cdot \{\}$?

Annahme: $L \cdot \{\} \neq \{\}$.

Sei dann $w \in L' = L \cdot \{\}$ beliebig, aber fest gewählt.

.

Widerspruchsbeweise

Was ist $L \cdot \{\}$?

Annahme: $L \cdot \{\} \neq \{\}$.

Sei dann $w \in L' = L \cdot \{\}$ beliebig, aber fest gewählt.
$\Rightarrow \exists w_1 \in L : \exists w_2 \in \{\} : w = w_1 w_2$

.

Widerspruchsbeweise

Was ist $L \cdot \{\}$?

Annahme: $L \cdot \{\} \neq \{\}$.

Sei dann $w \in L' = L \cdot \{\}$ beliebig, aber fest gewählt.
$\Rightarrow \exists w_1 \in L : \exists w_2 \in \{\} : w = w_1 w_2$

$\exists w_2 \in \{\}$???

.

Widerspruchsbeweise

Was ist $L \cdot \{\}$?

Annahme: $L \cdot \{\} \neq \{\}$.

Sei dann $w \in L' = L \cdot \{\}$ beliebig, aber fest gewählt.
$\Rightarrow \exists w_1 \in L : \exists w_2 \in \{\} : w = w_1 w_2$

Widerspruch zur Definition der leeren Menge!

.

Widerspruchsbeweise

Was ist $L \cdot \{\}$?

Annahme: $L \cdot \{\} \neq \{\}$.

Sei dann $w \in L' = L \cdot \{\}$ beliebig, aber fest gewählt.
$\Rightarrow \exists w_1 \in L : \exists w_2 \in \{\} : w = w_1 w_2$

Widerspruch zur Definition der leeren Menge!

$\Rightarrow$ Annahme war falsch, und $L \cdot \{\} = \{\}$ muss gelten.

.

Beschreibungen von Sprachen

$A = \{a, b, c\}$

$L = \{w \in A^* \mid$ nach dem ersten c kommt kein a mehr vor $\}$.

.

Beschreibungen von Sprachen

$A = \{a, b, c\}$

$L = \{w \in A^* \mid$ nach dem ersten c kommt kein a mehr vor $\}$.

Beispiele: $abacbccbc, abc, bbabbcbb \in L$

Gegenbeispiele: $abacaba, ca, cbbba \notin L$

.

Beschreibungen von Sprachen

$A = \{a, b, c\}$

$L = \{w \in A^* \mid$ nach dem ersten c kommt kein a mehr vor $\}$.

Beispiele: $abacbccbc, abc, bbabbcbb \in L$

Gegenbeispiele: $abacaba, ca, cbbba \notin L$

$aabaa \in L$?

.

Beschreibungen von Sprachen

$A = \{a, b, c\}$

$L = \{w \in A^* \mid$ nach dem ersten c kommt kein a mehr vor $\}$.

Beispiele: $abacbccbc, abc, bbabbcbb \in L$

Gegenbeispiele: $abacaba, ca, cbbba \notin L$

$aabaa \in L$? Unklar!

Wenn etwas unklar ist: Tutoren fragen, Übungsleiter fragen, Annahmen treffen.

Beschreibungen von Sprachen

$A = \{a, b, c\}$

$L = \{w \in A^* \mid$ nach dem ersten c kommt kein a mehr vor $\}$.

Beispiele: $abacbccbc, abc, bbabbcbb \in L$

Gegenbeispiele: $abacaba, ca, cbbba \notin L$

$aabaa \in L$!

.

Beschreibungen von Sprachen

$A = \{a, b, c\}$

$L = \{w \in A^* \mid$ nach dem ersten c kommt kein a mehr vor $\}$.

Struktur: Erst beliebig viele a und b, dann ein c, danach keine a mehr

oder: Nur a und b

.

Beschreibungen von Sprachen

$A = \{a, b, c\}$

$L = \{w \in A^* \mid \text{nach dem ersten } c \text{ kommt kein } a \text{ mehr vor }\}$.

Struktur: Erst beliebig viele a und b, dann ein c, danach keine a mehr

$\{a, b\}^*\{c\}\{b, c\}^*$

oder: Nur a und b

$\cup\{a, b\}^*$

.

Beschreibungen von Sprachen

$A = \{a, b, c\}$

$L = \{w \in A^* \mid$ vor einem b steht nie ein a $\}$.

.

Beschreibungen von Sprachen

$A = \{a, b, c\}$

$L = \{w \in A^* \mid$ vor einem b steht nie ein a $\}$.

Beispiele: $aaacbbbbaaaca, acacbac \in L$

Gegenbeispiele: $ab, acabbcba \notin L$

.

Beschreibungen von Sprachen

$A = \{a, b, c\}$

$L = \{w \in A^* \mid$ vor einem b steht nie ein a $\}$.

Struktur: Vor erstem b in einem Block steht ein c

.

Beschreibungen von Sprachen

$A = \{a, b, c\}$

$L = \{w \in A^* \mid$ vor einem b steht nie ein a $\}$.

Struktur: Vor erstem b in einem Block steht ein c

$\{a, c\}^*\{c\}\{b\}^+$

.

Beschreibungen von Sprachen

$A = \{a, b, c\}$

$L = \{w \in A^* \mid$ vor einem b steht nie ein a $\}$.

Struktur: Vor erstem b in einem Block steht ein c

$\{a, c\}^*\{c\}\{b\}^+$, wenn nur ein b-Block vorhanden.

.

Beschreibungen von Sprachen

$A = \{a, b, c\}$

$L = \{w \in A^* \mid$ vor einem b steht nie ein a $\}$.

Struktur: Vor erstem b in einem Block steht ein c

$\{a, c\}^*\{c\}\{b\}^+$, wenn genau ein b-Block vorhanden.

.

Beschreibungen von Sprachen

$A = \{a, b, c\}$

$L = \{w \in A^* \mid$ vor einem b steht nie ein a $\}$.

Struktur: Vor erstem b in einem Block steht ein c

$(\{a, c\}^*\{c\}\{b\}^+)^*$ für beliebig viele b-Blöcke.

.

Beschreibungen von Sprachen

$A = \{a, b, c\}$

$L = \{w \in A^* \mid$ vor einem b steht nie ein a $\}$.

Struktur: Vor erstem b in einem Block steht ein c
außer, wenn das erste Zeichen ein b ist!

$(\{a, c\}^*\{c\}\{b\}^+)^* \cup \{b\}^+(\{a, c\}^*\{c\}\{b\}^+)^*$

.

Beschreibungen von Sprachen

$A = \{a, b, c\}$

$L = \{w \in A^* \mid$ vor einem b steht nie ein a $\}$.

Struktur: Vor erstem b in einem Block steht ein c
außer, wenn das erste Zeichen ein b ist!

$(\{a, c\}^*\{c\}\{b\}^+)^* \cup \{b\}^+(\{a, c\}^*\{c\}\{b\}^+)^*$

Ausklammern: $(\{b\}^+ \cup \{\epsilon\})(\{a, c\}^*\{c\}\{b\}^+)^*$

.

Beschreibungen von Sprachen

$L = \{w \in A^* \mid \text{vor einem } b \text{ steht nie ein } a\ \}$.

$(\{a,c\}^*\{c\}\{b\}^+)^* \cup \{b\}^+(\{a,c\}^*\{c\}\{b\}^+)^*$

Ausklammern: $(\{b\}^+ \cup \{\epsilon\})(\{a,c\}^*\{c\}\{b\}^+)^*$

Erinnern: $\{b\}^*(\{a,c\}^*\{c\}\{b\}^+)^*$

.

Beschreibungen von Sprachen

$L = \{w \in A^* \mid$ vor einem b steht nie ein a $\}$.

$\{b\}^*(\{a,c\}^*\{c\}\{b\}^+)^*$

Obligatorischer “Mist, ich habe was vergessen”-Moment:

Wörter aus der angegebenen Sprache enden mit b, falls ein b vorkommt.

.

Beschreibungen von Sprachen

$L = \{w \in A^* \mid \text{vor einem } b \text{ steht nie ein } a\ \}$.

$\{b\}^*(\{a,c\}^*\{c\}\{b\}^+)^*$

Obligatorischer “Mist, ich habe was vergessen”-Moment:

Wörter aus der angegebenen Sprache enden mit b, falls ein b vorkommt.

$\{b\}^*(\{a,c\}^*\{c\}\{b\}^+)^*\{a,c\}^*$

.

Beschreibungen von Sprachen

$L = \{w \in A^* \mid \text{vor einem } b \text{ steht nie ein } a\ \}$.

$(\{a,c\}^*\{c\}\{b\}^+)^* \cup \{b\}^+(\{a,c\}^*\{c\}\{b\}^+)^*$

Feinschliff: $\{b\}^*(\{a\} \cup (\{c\}\{b\}^*))^*$

Hinweis: Es gibt schönere Notationen ...

.

Zum dritten Übungsblatt ...

Zu zeigen: $L \subseteq L \cdot L \Rightarrow \epsilon \in L$

Fehler in Aufgabenstellung: $\{\} \cdot \{\} \subseteq \{\}$ ist natürlich auch korrekt, obwohl $\epsilon \notin \{\}$ gilt. Wir gehen daher von einer nicht-leeren Sprache L aus!

.

Zum dritten Übungsblatt ...

Zu zeigen: $L \subseteq L \cdot L \Rightarrow \epsilon \in L$

Beispiel: $L = \{ab, aa, a, ac\}$

.

Zum dritten Übungsblatt ...

Zu zeigen: $L \subseteq L \cdot L \Rightarrow \epsilon \in L$

Beispiel: $L = \{ab, aa, a, ac\}$

$L^2 = \{abab, abaa, aba, abac, aaab, aaaa, aaa, aaac, aab, aa, aac, acab,$
$acaa, aca, acac\}$

.

Zum dritten Übungsblatt ...

Zu zeigen: $L \subseteq L \cdot L \Rightarrow \epsilon \in L$

Beispiel: $L = \{ab, aa, a, ac\}$

$L^2 = \{abab, abaa, aba, abac, aaab, aaaa, aaa, aaac, aab, aa, aac, acab, acaa, aca, acac\}$

Betrachte Wortlängen ...

.

Zum dritten Übungsblatt ...

Zu zeigen: $L \subseteq L \cdot L \Rightarrow \epsilon \in L$

Voraussetzung: Für L gilt $L \subseteq L \cdot L$.

Sei $w \in L$ ein Wort mit minimaler Länge $|w| = n$.

.

Zum dritten Übungsblatt ...

Zu zeigen: $L \subseteq L \cdot L \Rightarrow \epsilon \in L$

Voraussetzung: Für L gilt $L \subseteq L \cdot L$.

Sei $w \in L$ ein Wort mit minimaler Länge $|w| = n$.
$\Rightarrow \forall w_1, w_2 \in L : |w_1 w_2| = |w_1| + |w_2| \geq 2n$

.

Zum dritten Übungsblatt ...

Zu zeigen: $L \subseteq L \cdot L \Rightarrow \epsilon \in L$

Voraussetzung: Für L gilt $L \subseteq L \cdot L$.

Sei $w \in L$ ein Wort mit minimaler Länge $|w| = n$.
$\Rightarrow \forall w_1, w_2 \in L : |w_1 w_2| = |w_1| + |w_2| \geq 2n$
$\Rightarrow \forall w' \in L^2 : |w'| \geq 2n$.

.

Zum dritten Übungsblatt ...

Zu zeigen: $L \subseteq L \cdot L \Rightarrow \epsilon \in L$

Voraussetzung: Für L gilt $L \subseteq L \cdot L$.

Sei $w \in L$ ein Wort mit minimaler Länge $|w| = n$.
$\Rightarrow \forall w_1, w_2 \in L : |w_1 w_2| = |w_1| + |w_2| \geq 2n$
$\Rightarrow \forall w' \in L^2 : |w'| \geq 2n$.

Da nach Voraussetzung $w \in L \subseteq L^2$ gilt, folgt $|w| \geq 2n$

.

Zum dritten Übungsblatt ...

Zu zeigen: $L \subseteq L \cdot L \Rightarrow \epsilon \in L$

Voraussetzung: Für L gilt $L \subseteq L \cdot L$.

Sei $w \in L$ ein Wort mit minimaler Länge $|w| = n$.
$\Rightarrow \forall w_1, w_2 \in L : |w_1 w_2| = |w_1| + |w_2| \geq 2n$
$\Rightarrow \forall w' \in L^2 : |w'| \geq 2n$.

Da nach Voraussetzung $w \in L \subseteq L^2$ gilt, folgt $|w| \geq 2n$
$\Rightarrow n \geq 2n$

.

Zum dritten Übungsblatt ...

Zu zeigen: $L \subseteq L \cdot L \Rightarrow \epsilon \in L$

Voraussetzung: Für L gilt $L \subseteq L \cdot L$.

Sei $w \in L$ ein Wort mit minimaler Länge $|w| = n$.
$\Rightarrow \forall w_1, w_2 \in L : |w_1 w_2| = |w_1| + |w_2| \geq 2n$
$\Rightarrow \forall w' \in L^2 : |w'| \geq 2n$.

Da nach Voraussetzung $w \in L \subseteq L^2$ gilt, folgt $|w| \geq 2n$
$\Rightarrow n \geq 2n \Rightarrow n \leq 0$

.

Zum dritten Übungsblatt ...

Zu zeigen: $L \subseteq L \cdot L \Rightarrow \epsilon \in L$

Voraussetzung: Für L gilt $L \subseteq L \cdot L$.

Sei $w \in L$ ein Wort mit minimaler Länge $|w| = n$.
$\Rightarrow \forall w_1, w_2 \in L : |w_1 w_2| = |w_1| + |w_2| \geq 2n$
$\Rightarrow \forall w' \in L^2 : |w'| \geq 2n$.

Da nach Voraussetzung $w \in L \subseteq L^2$ gilt, folgt $|w| \geq 2n$
$\Rightarrow n \geq 2n \Rightarrow n \leq 0 \Rightarrow n = 0$

.

Zum dritten Übungsblatt ...

Zu zeigen: $L \subseteq L \cdot L \Rightarrow \epsilon \in L$

Voraussetzung: Für L gilt $L \subseteq L \cdot L$.

Sei $w \in L$ ein Wort mit minimaler Länge $|w| = n$.
$\Rightarrow \forall w_1, w_2 \in L : |w_1 w_2| = |w_1| + |w_2| \geq 2n$
$\Rightarrow \forall w' \in L^2 : |w'| \geq 2n$.

Da nach Voraussetzung $w \in L \subseteq L^2$ gilt, folgt $|w| \geq 2n$
$\Rightarrow n \geq 2n \Rightarrow n \leq 0 \Rightarrow n = 0 \Rightarrow w = \epsilon$. $\square$

.