Übung “Grundbegriffe der Informatik”

Karlsruher Institut für Technologie

Matthias Schulz, Gebäude 50.34, Raum 247

email: schulz@ira.uka.de

Matthias Janke, Gebäude 50.34, Raum 249

email: matthias.janke@kit.edu

Rekursive Definitionen

$R(\epsilon) = \epsilon$

$\forall w \in A^* \forall x \in A : R(wx) = xR(w)$

.

Rekursive Definitionen

$R(\epsilon) = \epsilon$
$\forall w \in A^* \forall x \in A : R(wx) = xR(w)$

$$R(abcd) = dR(abc) = dcR(ab) = dcbR(a) = dcbaR(\epsilon) = dcba$$

.

Rekursive Definitionen

$R(\epsilon) = \epsilon$
$\forall w \in A^* \forall x \in A : R(wx) = xR(w)$

$$R(abcd) = dR(abc) = dcR(ab) = dcbR(a) = dcbaR(\epsilon) = dcba$$

$\rightarrow$ Spiegelung des Wortes!

.

Rekursive Definitionen

$R(\epsilon) = \epsilon$
$\forall w \in A^* \forall x \in A : R(wx) = xR(w)$

$R(abcd) = dR(abc) = dcR(ab) = dcbR(a) = dcbaR(\epsilon) = dcba$

$\rightarrow$ Spiegelung des Wortes!

Leicht zu zeigen: $R(w_1 w_2) = R(w_2)R(w_1)$.

.

Rekursive Definitionen

$$w \in L \subseteq \{a,b\}^* \iff R(w) = w \wedge |w| \bmod 2 = 0$$

.

Rekursive Definitionen

$$w \in L \subseteq \{a,b\}^* \iff R(w) = w \wedge |w| \bmod 2 = 0$$

Palindrome gerader Länge: $aaaa, abba, baab, abaaba, \ldots$

.

Rekursive Definitionen

$$w \in L \subseteq \{a,b\}^* \iff R(w) = w \wedge |w| \text{ mod } 2 = 0$$

Rekursive Definition?

.

Rekursive Definitionen

$$w \in L \subseteq \{a, b\}^* \iff R(w) = w \wedge |w| \text{ mod } 2 = 0$$

- Erstes und letztes Zeichen gleich

.

Rekursive Definitionen

$$w \in L \subseteq \{a,b\}^* \iff R(w) = w \wedge |w| \bmod 2 = 0$$

- Erstes und letztes Zeichen gleich
- Wort in Mitte ebenfalls aus L

.

Rekursive Definitionen

$$w \in L \subseteq \{a, b\}^* \iff R(w) = w \wedge |w| \text{ mod } 2 = 0$$

- Erstes und letztes Zeichen gleich
- Wort in Mitte ebenfalls aus L
- $\epsilon \in L$

.

Rekursive Definitionen

$$w \in L \subseteq \{a,b\}^* \iff R(w) = w \wedge |w| \bmod 2 = 0$$

$$L = \{\epsilon\} \cup \{a\}L\{a\} \cup \{b\}L\{b\}$$

.

Rekursive Definitionen

$w \in L \subseteq \{a,b\}^* \iff R(w) = w \wedge |w| \text{ mod } 2 = 0$

$L = \{\epsilon\} \cup \{a\}L\{a\} \cup \{b\}L\{b\}$

$L_0 = \{\epsilon\}$
$\forall i \in \mathbb{N}_0 : L_{i+1} = \{\epsilon\} \cup \{a\}L_i\{a\} \cup \{b\}L_i\{b\}$

.

Rekursive Definitionen

$w \in L \subseteq \{a,b\}^* \iff R(w) = w \wedge |w| \bmod 2 = 0$

$L = \{\epsilon\} \cup \{a\}L\{a\} \cup \{b\}L\{b\}$

$L_0 = \{\epsilon\}$
$\forall i \in \mathbb{N}_0 : L_{i+1} = \{\epsilon\} \cup \{a\}L_i\{a\} \cup \{b\}L_i\{b\}$

$$\text{Lösung:} L' = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i$$

.

Rekursive Definitionen

$L = \{\epsilon\} \cup \{a\}L\{a\} \cup \{b\}L\{b\}$

$L_0 = \{\epsilon\}$
$\forall i \in \mathbb{N}_0 : L_{i+1} = \{\epsilon\} \cup \{a\}L_i\{a\} \cup \{b\}L_i\{b\}$

Zeige: $L' \subseteq \{\epsilon\} \cup \{a\}L'\{a\} \cup \{b\}L'\{b\}$

Sei $w \in L' \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0 : w \in L_n \Rightarrow n = 0 \vee$
$w \in (\{\epsilon\} \cup \{a\}L_{n-1}\{a\} \cup \{b\}L_{n-1}\{b\}$

.

Rekursive Definitionen

$L = \{\epsilon\} \cup \{a\}L\{a\} \cup \{b\}L\{b\}$

$L_0 = \{\epsilon\}$
$\forall i \in \mathbb{N}_0 : L_{i+1} = \{\epsilon\} \cup \{a\}L_i\{a\} \cup \{b\}L_i\{b\}$

Zeige: $L' \subseteq \{\epsilon\} \cup \{a\}L'\{a\} \cup \{b\}L'\{b\}$

Sei $w \in L' \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0 : w \in L_n \Rightarrow n = 0 \vee$
$w \in (\{\epsilon\} \cup \{a\}L_{n-1}\{a\} \cup \{b\}L_{n-1}\{b\}$

Da $L_{n-1} \subseteq L'$ gilt, folgt
$\{a\}L_{n-1}\{a\} \cup \{b\}L_{n-1}\{b\} \subseteq \{a\}L'\{a\} \cup \{b\}L'\{b\}$.

Rekursive Definitionen

$L = \{\epsilon\} \cup \{a\}L\{a\} \cup \{b\}L\{b\}$

$L_0 = \{\epsilon\}$
$\forall i \in \mathbb{N}_0 : L_{i+1} = \{\epsilon\} \cup \{a\}L_i\{a\} \cup \{b\}L_i\{b\}$

Zeige: $L' \subseteq \{\epsilon\} \cup \{a\}L'\{a\} \cup \{b\}L'\{b\}$

Sei $w \in L' \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0 : w \in L_n \Rightarrow n = 0 \vee w \in (\{\epsilon\} \cup \{a\}L_{n-1}\{a\} \cup \{b\}L_{n-1}\{b\}$

Da $L_{n-1} \subseteq L'$ gilt, folgt
$\{a\}L_{n-1}\{a\} \cup \{b\}L_{n-1}\{b\} \subseteq \{a\}L'\{a\} \cup \{b\}L'\{b\}$.

$n = 0 \Rightarrow w = \epsilon \Rightarrow w \in \{\epsilon\} \cup \{a\}L'\{a\} \cup \{b\}L'\{b\}$

Rekursive Definitionen

$L = \{\epsilon\} \cup \{a\}L\{a\} \cup \{b\}L\{b\}$

$L_0 = \{\epsilon\}$
$\forall i \in \mathbb{N}_0 : L_{i+1} = \{\epsilon\} \cup \{a\}L_i\{a\} \cup \{b\}L_i\{b\}$

Zeige: $L' \supseteq \{\epsilon\} \cup \{a\}L'\{a\} \cup \{b\}L'\{b\}$

.

Rekursive Definitionen

$L = \{\epsilon\} \cup \{a\}L\{a\} \cup \{b\}L\{b\}$

$L_0 = \{\epsilon\}$
$\forall i \in \mathbb{N}_0 : L_{i+1} = \{\epsilon\} \cup \{a\}L_i\{a\} \cup \{b\}L_i\{b\}$

Zeige: $L' \supseteq \{\epsilon\} \cup \{a\}L'\{a\} \cup \{b\}L'\{b\}$

Sei $w \in \{\epsilon\} \cup \{a\}L'\{a\} \cup \{b\}L'\{b\}$.

1. Fall: $w \in \{\epsilon\}$

2. Fall: $w \in \{a\}L'\{a\}$

3. Fall: $w \in \{b\}L'\{b\}$ analog zum zweiten Fall

.

Rekursive Definitionen

$L = \{\epsilon\} \cup \{a\}L\{a\} \cup \{b\}L\{b\}$

$L_0 = \{\epsilon\}$
$\forall i \in \mathbb{N}_0 : L_{i+1} = \{\epsilon\} \cup \{a\}L_i\{a\} \cup \{b\}L_i\{b\}$

Zeige: $L' \supseteq \{\epsilon\} \cup \{a\}L'\{a\} \cup \{b\}L'\{b\}$

Sei $w \in \{\epsilon\} \cup \{a\}L'\{a\} \cup \{b\}L'\{b\}$.

1. Fall: $w \in \{\epsilon\} \Rightarrow w = \epsilon \in L_0 \subseteq L'$

.

Rekursive Definitionen

$L = \{\epsilon\} \cup \{a\}L\{a\} \cup \{b\}L\{b\}$

$L_0 = \{\epsilon\}$
$\forall i \in \mathbb{N}_0 : L_{i+1} = \{\epsilon\} \cup \{a\}L_i\{a\} \cup \{b\}L_i\{b\}$

Zeige: $L' \supseteq \{\epsilon\} \cup \{a\}L'\{a\} \cup \{b\}L'\{b\}$

Sei $w \in \{\epsilon\} \cup \{a\}L'\{a\} \cup \{b\}L'\{b\}$.

2. Fall: $w \in \{a\}L'\{a\} \Rightarrow \exists w' \in L' : w = aw'a$

.

Rekursive Definitionen

$L = \{\epsilon\} \cup \{a\}L\{a\} \cup \{b\}L\{b\}$

$L_0 = \{\epsilon\}$
$\forall i \in \mathbb{N}_0 : L_{i+1} = \{\epsilon\} \cup \{a\}L_i\{a\} \cup \{b\}L_i\{b\}$

Zeige: $L' \supseteq \{\epsilon\} \cup \{a\}L'\{a\} \cup \{b\}L'\{b\}$

Sei $w \in \{\epsilon\} \cup \{a\}L'\{a\} \cup \{b\}L'\{b\}$.

2. Fall: $w \in \{a\}L'\{a\} \Rightarrow \exists w' \in L' : w = aw'a$
$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0 : w' \in L_n \wedge aw'a = w$

.

Rekursive Definitionen

$L = \{\epsilon\} \cup \{a\}L\{a\} \cup \{b\}L\{b\}$

$L_0 = \{\epsilon\}$
$\forall i \in \mathbb{N}_0 : L_{i+1} = \{\epsilon\} \cup \{a\}L_i\{a\} \cup \{b\}L_i\{b\}$

Zeige: $L' \supseteq \{\epsilon\} \cup \{a\}L'\{a\} \cup \{b\}L'\{b\}$

Sei $w \in \{\epsilon\} \cup \{a\}L'\{a\} \cup \{b\}L'\{b\}$.

2. Fall: $w \in \{a\}L'\{a\} \Rightarrow \exists w' \in L' : w = aw'a$
$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0 : w' \in L_n \wedge aw'a = w$
$\Rightarrow w \in \{\epsilon\} \cup \{a\}L_n\{a\} \cup \{b\}L_n\{b\}$

.

Rekursive Definitionen

$L = \{\epsilon\} \cup \{a\}L\{a\} \cup \{b\}L\{b\}$

$L_0 = \{\epsilon\}$
$\forall i \in \mathbb{N}_0 : L_{i+1} = \{\epsilon\} \cup \{a\}L_i\{a\} \cup \{b\}L_i\{b\}$

Zeige: $L' \supseteq \{\epsilon\} \cup \{a\}L'\{a\} \cup \{b\}L'\{b\}$

Sei $w \in \{\epsilon\} \cup \{a\}L'\{a\} \cup \{b\}L'\{b\}$.

2. Fall: $w \in \{a\}L'\{a\} \Rightarrow \exists w' \in L' : w = aw'a$
$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0 : w' \in L_n \wedge aw'a = w$
$\Rightarrow w \in \{\epsilon\} \cup \{a\}L_n\{a\} \cup \{b\}L_n\{b\}$
$\Rightarrow w \in L_{n+1} \subseteq L'$

.

Rekursive Definitionen

$L = \{\epsilon\} \cup \{a\}L\{a\} \cup \{b\}L\{b\}$ gelte.

$L_0 = \{\epsilon\}$
$\forall i \in \mathbb{N}_0 : L_{i+1} = \{\epsilon\} \cup \{a\}L_i\{a\} \cup \{b\}L_i\{b\}$

$$L' = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i$$

Zeige: $L' \subseteq L$. (Also: L' "kleinste" Sprache, die Gleichung erfüllt.)

.

Rekursive Definitionen

$L = \{\epsilon\} \cup \{a\}L\{a\} \cup \{b\}L\{b\}$ gelte.

$L_0 = \{\epsilon\}$
$\forall i \in \mathbb{N}_0 : L_{i+1} = \{\epsilon\} \cup \{a\}L_i\{a\} \cup \{b\}L_i\{b\}$

$$L' = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i$$

Zeige: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : L_n \subseteq L$.

.

Rekursive Definitionen

$L = \{\epsilon\} \cup \{a\}L\{a\} \cup \{b\}L\{b\}$ gelte.

$L_0 = \{\epsilon\}$
$\forall i \in \mathbb{N}_0 : L_{i+1} = \{\epsilon\} \cup \{a\}L_i\{a\} \cup \{b\}L_i\{b\}$

Zeige: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : L_n \subseteq L$.

IA: $n = 0$: $w \in L_0 \Rightarrow w = \epsilon \to w \in \{\epsilon\}\cup\{a\}L\{a\}\cup\{b\}L\{b\} = L$
$\checkmark$

.

Rekursive Definitionen

$L = \{\epsilon\} \cup \{a\}L\{a\} \cup \{b\}L\{b\}$ gelte.

$L_0 = \{\epsilon\}$
$\forall i \in \mathbb{N}_0 : L_{i+1} = \{\epsilon\} \cup \{a\}L_i\{a\} \cup \{b\}L_i\{b\}$

Zeige: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : L_n \subseteq L$.

IV: Für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ gelte $L_n \subseteq L$.

.

Rekursive Definitionen

$L = \{\epsilon\} \cup \{a\}L\{a\} \cup \{b\}L\{b\}$ gelte.

$L_0 = \{\epsilon\}$
$\forall i \in \mathbb{N}_0 : L_{i+1} = \{\epsilon\} \cup \{a\}L_i\{a\} \cup \{b\}L_i\{b\}$

Zeige: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : L_n \subseteq L$.

IS: $n \to n+1$: Zu zeigen: $L_{n+1} \subseteq L$.

.

Rekursive Definitionen

$L = \{\epsilon\} \cup \{a\}L\{a\} \cup \{b\}L\{b\}$ gelte.

$L_0 = \{\epsilon\}$
$\forall i \in \mathbb{N}_0 : L_{i+1} = \{\epsilon\} \cup \{a\}L_i\{a\} \cup \{b\}L_i\{b\}$

Zeige: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : L_n \subseteq L$.

IS: $n \to n+1$: Zu zeigen: $L_{n+1} \subseteq L$.

$w \in L_{n+1} \Rightarrow w = \epsilon \in L \vee \exists w' \in L_n : w = aw'a \in \{a\}L\{a\}$ (nach IV)$\vee$
$\exists w' \in L_n : w = bw'b \in \{b\}L\{b\}$ (nach IV)

.

Rekursive Definitionen

$L = \{\epsilon\} \cup \{a\}L\{a\} \cup \{b\}L\{b\}$ gelte.

$L_0 = \{\epsilon\}$
$\forall i \in \mathbb{N}_0 : L_{i+1} = \{\epsilon\} \cup \{a\}L_i\{a\} \cup \{b\}L_i\{b\}$

Zeige: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : L_n \subseteq L$.

IS: $n \to n+1$: Zu zeigen: $L_{n+1} \subseteq L$.

$w \in L_{n+1} \Rightarrow w = \epsilon \in L \vee \exists w' \in L_n : w = aw'a \in \{a\}L\{a\}$ (nach IV)$\vee$
$\exists w' \in L_n : w = bw'b \in \{b\}L\{b\}$ (nach IV)

$\Rightarrow w \in L \Rightarrow L_{n+1} \subseteq L$. $\square$

.

Wörter über $\{a, b\}$, die keine Palindrome sind?

.

Kontextfreie Grammatiken

Wörter über $\{a, b\}$, die keine Palindrome sind?

Erstes und letztes Zeichen gleich: Wort in Mitte kein Palindrom.

.

Kontextfreie Grammatiken

Wörter über $\{a, b\}$, die keine Palindrome sind?

Erstes und letztes Zeichen gleich: Wort in Mitte kein Palindrom.

Erstes und letztes Zeichen verschieden: Beliebiges Wort in Mitte.

.

Kontextfreie Grammatiken

Wörter über $A = \{a, b\}$, die keine Palindrome sind?

$$L = \{a\}L\{a\} \cup \{b\}L\{b\} \cup \{a\}A^*\{b\} \cup \{b\}A^*\{a\}$$

.

Kontextfreie Grammatiken

Wörter über $A = \{a, b\}$, die keine Palindrome sind?

$L = \{a\}L\{a\} \cup \{b\}L\{b\} \cup \{a\}A^*\{b\} \cup \{b\}A^*\{a\}$

Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit $N = \{S, A\}, T = \{a, b\}$,
$P = \{S \to aSa \mid bSb \mid aAb \mid bAa,$
$A \to AA \mid a \mid b \mid \epsilon\}$

.

Kontextfreie Grammatiken

Wörter über $A = \{a, b\}$, die keine Palindrome sind?

$L = \{a\}L\{a\} \cup \{b\}L\{b\} \cup \{a\}A^*\{b\} \cup \{b\}A^*\{a\}$

Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit $N = \{S, A\}, T = \{a, b\}$,
$P = \{S \to aSa \mid bSb \mid aAb \mid bAa,$
$A \to AA \mid a \mid b \mid \epsilon\}$

$S \Rightarrow aSa \Rightarrow abSba \Rightarrow abaAbba \Rightarrow abaAAbba \Rightarrow abaaAbba \Rightarrow abaabbba$

.

Kontextfreie Grammatiken

Wörter über $A = \{a, b\}$, die keine Palindrome sind?

$L = \{a\}L\{a\} \cup \{b\}L\{b\} \cup \{a\}A^*\{b\} \cup \{b\}A^*\{a\}$

Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit $N = \{S, A\}, T = \{a, b\}$,
$P = \{S \to aSa \mid bSb \mid aAb \mid bAa,$
$A \to AA \mid a \mid b \mid \epsilon\}$

Beweis der Korrektheit?

.

Kontextfreie Grammatiken

Wörter über $A = \{a, b\}$, die keine Palindrome sind?

Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit $N = \{S, A\}, T = \{a, b\}$,
$P = \{S \to aSa \mid bSb \mid aAb \mid bAa,$
$A \to aAa \mid aAb \mid bAa \mid bAb \mid \epsilon \mid a \mid b\}$

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\forall w \in \{a, b, A, S\}^*$
$S \Rightarrow^n w \Rightarrow w$ ist ein Nicht-Palindrom über T
$\vee \exists w_1, w_2 \in T^n : w = w_1 S w_2 \vee (w = w_1 A w_2 \wedge w_1 \neq R(w_2))$

.

Kontextfreie Grammatiken

Wörter über $A = \{a, b\}$, die keine Palindrome sind?

Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit $N = \{S, A\}, T = \{a, b\}$,
$P = \{S \to aSa \mid bSb \mid aAb \mid bAa,$
$A \to aAa \mid aAb \mid bAa \mid bAb \mid \epsilon \mid a \mid b\}$

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\forall w \in \{a, b, A, S\}^*$
$S \Rightarrow^n w \Rightarrow w$ ist ein Nicht-Palindrom über T
$\vee \exists w_1, w_2 \in T^n : w = w_1 S w_2 \vee (w = w_1 A w_2 \wedge w_1 \neq R(w_2))$

IA: $n = 0$: $S \Rightarrow^0 w \Rightarrow w = S \Rightarrow$für $w_1 = w_2 = \epsilon \in T^0$ gilt
$w = w_1 S w_2$✓

.

Wörter über $A = \{a, b\}$, die keine Palindrome sind?

Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit $N = \{S, A\}, T = \{a, b\}$,
$P = \{S \to aSa \mid bSb \mid aAb \mid bAa,$
$A \to aAa \mid aAb \mid bAa \mid bAb \mid \epsilon \mid a \mid b\}$

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\forall w \in \{a, b, A, S\}^*$
$S \Rightarrow^n w \Rightarrow w$ ist ein Nicht-Palindrom über T
$\vee \exists w_1, w_2 \in T^n : w = w_1 S w_2 \vee (w = w_1 A w_2 \wedge w_1 \neq R(w_2))$

IV: Für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:
$\forall w \in \{a, b, A, S\}^* S \Rightarrow^n w \Rightarrow w$ ist ein Nicht-Palindrom
$\vee \exists w_1, w_2 \in T^n : w = w_1 S w_2 \vee (w = w_1 A w_2 \wedge w_1 \neq R(w_2))$

.

Kontextfreie Grammatiken

Wörter über $A = \{a, b\}$, die keine Palindrome sind?

Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit $N = \{S, A\}, T = \{a, b\}$,
$P = \{S \to aSa \mid bSb \mid aAb \mid bAa,$
$A \to aAa \mid aAb \mid bAa \mid bAb \mid \epsilon \mid a \mid b\}$

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\forall w \in \{a, b, A, S\}^*$
$S \Rightarrow^n w \Rightarrow w$ ist ein Nicht-Palindrom über T
$\vee \exists w_1, w_2 \in T^n : w = w_1 S w_2 \vee (w = w_1 A w_2 \wedge w_1 \neq R(w_2))$

IS: $n \to n+1$: $S \Rightarrow^{n+1} w' \Rightarrow \exists w \in \{a, b, A, S\}^* : S \Rightarrow^n w \Rightarrow w'$.

.

Kontextfreie Grammatiken

Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit $N = \{S, A\}, T = \{a, b\}$,
$P = \{S \to aSa \mid bSb \mid aAb \mid bAa,$
$A \to aAa \mid aAb \mid bAa \mid bAb \mid \epsilon \mid a \mid b\}$

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\forall w \in \{a, b, A, S\}^*$
$S \Rightarrow^n w \Rightarrow w$ ist ein Nicht-Palindrom über T
$\vee \exists w_1, w_2 \in T^n : w = w_1 S w_2 \vee (w = w_1 A w_2 \wedge w_1 \neq R(w_2))$

IS: $n \to n{+}1$: $S \Rightarrow^{n+1} w' \Rightarrow \exists w \in \{a, b, A, S\}^* : S \Rightarrow^n w \Rightarrow w'$.

Nach IV gilt: $\exists w_1, w_2 \in T^n : w = w_1 S w_2 \vee (w = w_1 A w_2 \wedge w_1 \neq R(w_2))$.

Kontextfreie Grammatiken

Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit $N = \{S, A\}, T = \{a, b\}$,
$P = \{S \to aSa \mid bSb \mid aAb \mid bAa$,
$A \to aAa \mid aAb \mid bAa \mid bAb \mid \epsilon \mid a \mid b\}$

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\forall w \in \{a, b, A, S\}^*$
$S \Rightarrow^n w \Rightarrow w$ ist ein Nicht-Palindrom über T
$\vee \exists w_1, w_2 \in T^n : w = w_1 S w_2 \vee (w = w_1 A w_2 \wedge w_1 \neq R(w_2))$

1. Fall: $w = w_1 S w_2 \Rightarrow w' \in \{w_1 aSa w_2, w_1 bSb w_2, w_1 aAb w_2, w_1 bAa w_2\}$.

.

Kontextfreie Grammatiken

Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit $N = \{S, A\}, T = \{a, b\}$,
$P = \{S \to aSa \mid bSb \mid aAb \mid bAa$,
$A \to aAa \mid aAb \mid bAa \mid bAb \mid \epsilon \mid a \mid b\}$

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\forall w \in \{a, b, A, S\}^*$
$S \Rightarrow^n w \Rightarrow w$ ist ein Nicht-Palindrom über T
$\vee \exists w_1, w_2 \in T^n : w = w_1 S w_2 \vee (w = w_1 A w_2 \wedge w_1 \neq R(w_2))$

1. Fall: $w = w_1 S w_2 \Rightarrow w' \in \{w_1 aSa w_2, w_1 bSb w_2, w_1 aAb w_2, w_1 bAa w_2\}$.

1. Unterfall: $w' \in \{w_1 aSa w_2, w_1 bSb w_2\} \Rightarrow \exists w'_1, w'_2 \in T^{n+1}$:
$w' = w'_1 S w'_2$

.

Kontextfreie Grammatiken

Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit $N = \{S, A\}, T = \{a, b\}$,
$P = \{S \to aSa \mid bSb \mid aAb \mid bAa,$
$A \to aAa \mid aAb \mid bAa \mid bAb \mid \epsilon \mid a \mid b\}$

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\forall w \in \{a, b, A, S\}^*$
$S \Rightarrow^n w \Rightarrow w$ ist ein Nicht-Palindrom über T
$\vee \exists w_1, w_2 \in T^n : w = w_1 S w_2 \vee (w = w_1 A w_2 \wedge w_1 \neq R(w_2))$

1. Fall: $w = w_1 S w_2 \Rightarrow w' \in \{w_1 aSa w_2, w_1 bSb w_2, w_1 aAb w_2, w_1 bAa w_2\}$.

2. Unterfall: $w' \in \{w_1 aAb w_2, w_1 bAa w_2\} \Rightarrow \exists w_1', w_2' \in T^{n+1}$:
$w' = w_1' A w_2' \wedge w_1' \neq R(w_2')$ (da letzte Zeichen verschieden!)
$\checkmark$

Kontextfreie Grammatiken

Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit $N = \{S, A\}, T = \{a, b\}$,
$P = \{S \to aSa \mid bSb \mid aAb \mid bAa,$
$A \to aAa \mid aAb \mid bAa \mid bAb \mid \epsilon \mid a \mid b\}$

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\forall w \in \{a, b, A, S\}^*$
$S \Rightarrow^n w \Rightarrow w$ ist ein Nicht-Palindrom über T
$\vee \exists w_1, w_2 \in T^n : w = w_1 S w_2 \vee (w = w_1 A w_2 \wedge w_1 \neq R(w_2))$

2. Fall: $w = w_1 A w_2 \wedge w_1 \neq R(w_2) \Rightarrow$
$w' \in \{w_1 aAa w_2, w_1 bAb w_2, w_1 aAb w_2, w_1 bAa w_2, w_1 a w_2, w_1 b w_2, w_1 w_2\}$.

.

Kontextfreie Grammatiken

Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit $N = \{S, A\}, T = \{a, b\}$,
$P = \{S \to aSa \mid bSb \mid aAb \mid bAa,$
$A \to aAa \mid aAb \mid bAa \mid bAb \mid \epsilon \mid a \mid b\}$

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\forall w \in \{a, b, A, S\}^*$
$S \Rightarrow^n w \Rightarrow w$ ist ein Nicht-Palindrom über T
$\vee \exists w_1, w_2 \in T^n : w = w_1 S w_2 \vee (w = w_1 A w_2 \wedge w_1 \neq R(w_2))$

2. Fall: $w = w_1 A w_2 \wedge w_1 \neq R(w_2) \Rightarrow$
$w' \in \{w_1 aAa w_2, w_1 bAb w_2, w_1 aAb w_2, w_1 bAa w_2, w_1 a w_2, w_1 b w_2, w_1 w_2\}$.

1. Unterfall: $w' \in \{w_1 aAa w_2, w_1 bAb w_2, w_1 aAb w_2, w_1 bAa w_2, \}$.

.

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\forall w \in \{a, b, A, S\}^*$
$S \Rightarrow^n w \Rightarrow w$ ist ein Nicht-Palindrom über T
$\vee \exists w_1, w_2 \in T^n : w = w_1 S w_2 \vee (w = w_1 A w_2 \wedge w_1 \neq R(w_2))$

2. Fall: $w = w_1 A w_2 \wedge w_1 \neq R(w_2) \Rightarrow$
$w' \in \{w_1 aAa w_2, w_1 bAb w_2, w_1 aAb w_2, w_1 bAa w_2, w_1 a w_2, w_1 b w_2, w_1 w_2\}$.

1. Unterfall: $w' \in \{w_1 aAa w_2, w_1 bAb w_2, w_1 aAb w_2, w_1 bAa w_2, \}$.

Für $w_1' \in \{w_1 a, w_1 b\}$ und $w_2' \in \{a w_2, b w_2\}$ gilt $w_1' \in \{w_1 a, w_1 b\} \neq R(w_2') \in \{R(w_2) a, R(w_2) b\}$, da Präfixe der Länge n verschieden sind.

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\forall w \in \{a, b, A, S\}^*$
$S \Rightarrow^n w \Rightarrow w$ ist ein Nicht-Palindrom über T
$\vee \exists w_1, w_2 \in T^n : w = w_1 S w_2 \vee (w = w_1 A w_2 \wedge w_1 \neq R(w_2))$

2. Fall: $w = w_1 A w_2 \wedge w_1 \neq R(w_2) \Rightarrow$
$w' \in \{w_1 aAa w_2, w_1 bAb w_2, w_1 aAb w_2, w_1 bAa w_2, w_1 a w_2, w_1 b w_2, w_1 w_2\}$.

1. Unterfall: $w' \in \{w_1 aAa w_2, w_1 bAb w_2, w_1 aAb w_2, w_1 bAa w_2, \}$.

Für $w_1' \in \{w_1 a, w_1 b\}$ und $w_2' \in \{a w_2, b w_2\}$ gilt $w_1' \in \{w_1 a, w_1 b\} \neq R(w_2') \in \{R(w_2) a, R(w_2) b\}$, da Präfixe der Länge n verschieden sind.

$\Rightarrow \exists w_1', w_2' \in T^{n+1} : w' = w_1' A w_2' \wedge w_1' \neq R(w_2')$

Kontextfreie Grammatiken

Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit $N = \{S, A\}, T = \{a, b\}$,
$P = \{S \to aSa \mid bSb \mid aAb \mid bAa,$
$A \to aAa \mid aAb \mid bAa \mid bAb \mid \epsilon \mid a \mid b\}$

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\forall w \in \{a, b, A, S\}^*$
$S \Rightarrow^n w \Rightarrow w$ ist ein Nicht-Palindrom über T
$\vee \exists w_1, w_2 \in T^n : w = w_1 S w_2 \vee (w = w_1 A w_2 \wedge w_1 \neq R(w_2))$

2. Fall: $w = w_1 A w_2 \wedge w_1 \neq R(w_2) \Rightarrow$
$w' \in \{w_1 aAa w_2, w_1 bAb w_2, w_1 aAb w_2, w_1 bAa w_2, w_1 a w_2, w_1 b w_2, w_1 w_2\}$.

2. Unterfall: $w' \in \{w_1 a w_2, w_1 b w_2, w_1 w_2\}$.

.

Kontextfreie Grammatiken

Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit $N = \{S, A\}, T = \{a, b\}$,
$P = \{S \to aSa \mid bSb \mid aAb \mid bAa,$
$A \to aAa \mid aAb \mid bAa \mid bAb \mid \epsilon \mid a \mid b\}$

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\forall w \in \{a, b, A, S\}^*$
$S \Rightarrow^n w \Rightarrow w$ ist ein Nicht-Palindrom über T
$\vee \exists w_1, w_2 \in T^n : w = w_1 S w_2 \vee (w = w_1 A w_2 \wedge w_1 \neq R(w_2))$

2. Fall: $w = w_1 A w_2 \wedge w_1 \neq R(w_2) \Rightarrow$
$w' \in \{w_1 aAa w_2, w_1 bAb w_2, w_1 aAb w_2, w_1 bAa w_2, w_1 a w_2, w_1 b w_2, w_1 w_2\}$.

2. Unterfall: $w' \in \{w_1 a w_2, w_1 b w_2, w_1 w_2\}$.

Es gilt $R(w') \in \{R(w_2)\}\{a, b, \epsilon\}\{R(w_1)\}$

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\forall w \in \{a, b, A, S\}^*$
$S \Rightarrow^n w \Rightarrow w$ ist ein Nicht-Palindrom über T
$\vee \exists w_1, w_2 \in T^n : w = w_1 S w_2 \vee (w = w_1 A w_2 \wedge w_1 \neq R(w_2))$

2. Fall: $w = w_1 A w_2 \wedge w_1 \neq R(w_2) \Rightarrow$
$w' \in \{w_1 aAa w_2, w_1 bAb w_2, w_1 aAb w_2, w_1 bAa w_2, w_1 a w_2, w_1 b w_2, w_1 w_2\}$.

2. Unterfall: $w' \in \{w_1 a w_2, w_1 b w_2, w_1 w_2\}$.

Es gilt $R(w') \in \{R(w_2)\}\{a, b, \epsilon\}\{R(w_1)\}$

Präfix von $R(w')$ der Länge n ist immer $R(w_2) \neq w_1 =$ Präfix der Länge n von w'

Kontextfreie Grammatiken

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\forall w \in \{a, b, A, S\}^*$
$S \Rightarrow^n w \Rightarrow w$ ist ein Nicht-Palindrom über T
$\vee \exists w_1, w_2 \in T^n : w = w_1 S w_2 \vee (w = w_1 A w_2 \wedge w_1 \neq R(w_2))$

2. Fall: $w = w_1 A w_2 \wedge w_1 \neq R(w_2) \Rightarrow$
$w' \in \{w_1 aAa w_2, w_1 bAb w_2, w_1 aAb w_2, w_1 bAa w_2, w_1 a w_2, w_1 b w_2, w_1 w_2\}$.

2. Unterfall: $w' \in \{w_1 a w_2, w_1 b w_2, w_1 w_2\}$.

Es gilt $R(w') \in \{R(w_2)\}\{a, b, \epsilon\}\{R(w_1)\}$

Präfix von $R(w')$ der Länge n ist immer $R(w_2) \neq w_1 =$ Präfix der Länge n von $w' \Rightarrow w'$ ist ein Nicht-Palindrom über T.

Kontextfreie Grammatiken

Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit $N = \{S, A\}, T = \{a, b\}$,
$P = \{S \to aSa \mid bSb \mid aAb \mid bAa,$
$A \to aAa \mid aAb \mid bAa \mid bAb \mid \epsilon \mid a \mid b\}$

Fertig?

.

Kontextfreie Grammatiken

Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit $N = \{S, A\}, T = \{a, b\}$,
$P = \{S \to aSa \mid bSb \mid aAb \mid bAa,$
$A \to aAa \mid aAb \mid bAa \mid bAb \mid \epsilon \mid a \mid b\}$

Noch zu zeigen: Jedes Nicht-Palindrom über T ableitbar.

.

Kontextfreie Grammatiken

Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit $N = \{S, A\}, T = \{a, b\}$,
$P = \{S \to aSa \mid bSb \mid aAb \mid bAa,$
$A \to aAa \mid aAb \mid bAa \mid bAb \mid \epsilon \mid a \mid b\}$

Noch zu zeigen: Jedes Nicht-Palindrom über T ableitbar.

Schritt 1: Jedes Wort aus T^* kann aus A abgeleitet werden.

Schritt 2: Jedes Nicht-Palindrom über T kann aus S abgeleitet werden.

Jeweils vollständige Induktion mit angepasster Behauptung.

.

Kontextfreie Grammatiken

Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit $N = \{S, A\}, T = \{a, b\}$,
$P = \{S \to aSa \mid bSb \mid aAb \mid bAa$,
$A \to aAa \mid aAb \mid bAa \mid bAb \mid \epsilon \mid a \mid b\}$

Noch zu zeigen: Jedes Nicht-Palindrom über T ableitbar.

Schritt 1: Jedes Wort aus T^* kann aus A abgeleitet werden.

Schritt 2: Jedes Nicht-Palindrom über T kann aus S abgeleitet werden.

Jeweils vollständige Induktion mit angepasster Behauptung.

$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \forall w \in T^* : |w| \leq n + 1 \Rightarrow A \Rightarrow^* w$.

.

Kontextfreie Grammatiken

Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit $N = \{S, A\}, T = \{a, b\}$,
$P = \{S \to aSa \mid bSb \mid aAb \mid bAa,$
$A \to aAa \mid aAb \mid bAa \mid bAb \mid \epsilon \mid a \mid b\}$

$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \forall w \in T^* : |w| \leq n + 1 \Rightarrow A \Rightarrow^* w.$

IA: $n = 0$: $|w| \leq 1 \Rightarrow w \in \{a, b, \epsilon\} \Rightarrow (A \Rightarrow w) \Rightarrow A \Rightarrow^* w$ ✓

.

Kontextfreie Grammatiken

Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit $N = \{S, A\}, T = \{a, b\}$,
$P = \{S \to aSa \mid bSb \mid aAb \mid bAa,$
$A \to aAa \mid aAb \mid bAa \mid bAb \mid \epsilon \mid a \mid b\}$

$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \forall w \in T^* : |w| \leq n + 1 \Rightarrow A \Rightarrow^* w.$

IV: Für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ gelte: $\forall w \in T^* :$
$|w| \leq n + 1 \Rightarrow A \Rightarrow^* w$

.

Kontextfreie Grammatiken

Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit $N = \{S, A\}, T = \{a, b\}$,
$P = \{S \to aSa \mid bSb \mid aAb \mid bAa,$
$A \to aAa \mid aAb \mid bAa \mid bAb \mid \epsilon \mid a \mid b\}$

$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \forall w \in T^* : |w| \leq n + 1 \Rightarrow A \Rightarrow^* w.$

IS: $n \Rightarrow n + 1$: Zu zeigen: $\forall w \in T^* : |w| \leq n + 2 \Rightarrow A \Rightarrow^* w.$

1. Fall: $|w| \leq n + 1 \Rightarrow A \Rightarrow^* w$ folgt nach IV.

.

Kontextfreie Grammatiken

Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit $N = \{S, A\}, T = \{a, b\}$,
$P = \{S \to aSa \mid bSb \mid aAb \mid bAa,$
$A \to aAa \mid aAb \mid bAa \mid bAb \mid \epsilon \mid a \mid b\}$

$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \forall w \in T^* : |w| \leq n + 1 \Rightarrow A \Rightarrow^* w.$

IS: $n \Rightarrow n + 1$: Zu zeigen: $\forall w \in T^* : |w| \leq n + 2 \Rightarrow A \Rightarrow^* w.$

2. Fall: $|w| = n + 2 \Rightarrow \exists w' \in T^n \exists x, y \in T : w = xw'y.$

.

Kontextfreie Grammatiken

Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit $N = \{S, A\}, T = \{a, b\}$,
$P = \{S \to aSa \mid bSb \mid aAb \mid bAa,$
$A \to aAa \mid aAb \mid bAa \mid bAb \mid \epsilon \mid a \mid b\}$

$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \forall w \in T^* : |w| \leq n + 1 \Rightarrow A \Rightarrow^* w.$

IS: $n \Rightarrow n + 1$: Zu zeigen: $\forall w \in T^* : |w| \leq n + 2 \Rightarrow A \Rightarrow^* w.$

2. Fall: $|w| = n + 2 \Rightarrow \exists w' \in T^n \exists x, y \in T : w = xw'y.$

Dann gilt: $A \Rightarrow xAy \overset{IV}{\Rightarrow^*} xw'y = w \ \square.$

.

Kontextfreie Grammatiken

Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit $N = \{S, A\}, T = \{a, b\}$,
$P = \{S \to aSa \mid bSb \mid aAb \mid bAa,$
$A \to aAa \mid aAb \mid bAa \mid bAb \mid \epsilon \mid a \mid b\}$

Wie kann man Wörter der Form $a^n b^{2m+1} a^{n+1}$ mit $n, m \geq 1$ ableiten?

.

Kontextfreie Grammatiken

Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit $N = \{S, A\}, T = \{a, b\}$,
$P = \{S \to aSa \mid bSb \mid aAb \mid bAa,$
$A \to aAa \mid aAb \mid bAa \mid bAb \mid \epsilon \mid a \mid b\}$

Wie kann man Wörter der Form $a^n b^{2m+1} a^{n+1}$ mit $n, m \in \mathbb{N}_0$ aus S ableiten?

- n mal S durch aSa ersetzen.
- Einmal S durch bAa ersetzen.
- m mal A durch bAb ersetzen.
- A durch ϵ ersetzen.