Übung "Grundbegriffe der Informatik"

Karlsruher Institut für Technologie

Matthias Schulz, Gebäude 50.34, Raum 247

email: schulz@ira.uka.de

Matthias Janke, Gebäude 50.34, Raum 249

email: matthias.janke@kit.edu

Relationen

Wegfahren am Wochenende mit dem Zug:

- Den ersten Teil der Strecke mit ICE
- Den zweiten Teil der Strecke mit Regionalexpress
- Genau einmal umsteigen

Von wo nach wo möglich?

.

Relationen

S ist Menge deutscher Städte

$I \subseteq S \times S$,

$R \subseteq S \times S$

.

Relationen

S ist Menge deutscher Städte

$I \subseteq S \times S$,

$R \subseteq S \times S$

$(x, y) \in I \iff$ Es fährt ICE von x nach y.

$(x, y) \in R \iff$ Es fährt RE von x nach y.

.

Relationen

$(x, y) \in I \iff$ Es fährt ICE von x nach y.
$(x, y) \in R \iff$ Es fährt RE von x nach y.

Mögliche Anfangs/Endstädte: Es fährt ICE von x zu einer Stadt z
und es fährt ein RE von z nach y.

.

Relationen

$(x, y) \in I \iff$ Es fährt ICE von x nach y.
$(x, y) \in R \iff$ Es fährt RE von x nach y.

Mögliche Anfangs/Endstädte: Es fährt ICE von x zu einer Stadt z
und es fährt ein RE von z nach y.

Beispiel: Von Karlsruhe mit ICE nach Berlin/Spandau, dann mit RE nach Rathenow.

.

Relationen

$(x, y) \in I \iff$ Es fährt ICE von x nach y.
$(x, y) \in R \iff$ Es fährt RE von x nach y.

Mögliche Anfangs/Endstädte: Es fährt ICE von x zu einer Stadt z
und es fährt ein RE von z nach y.

Gesuchte Relation: $R \circ I$

.

Relationen

$(x, y) \in I \iff$ Es fährt ICE von x nach y.
$(x, y) \in R \iff$ Es fährt RE von x nach y.

Mögliche Anfangs/Endstädte: Es fährt ICE von x zu einer Stadt z
und es fährt ein RE von z nach y.

Gesuchte Relation: $R \circ I$

Hinweis: $\circ$ als "nach" lesen, und es wird offensichtlich!

.

Relationen

$(x, y) \in I \iff$ Es fährt ICE von x nach y.
$(x, y) \in R \iff$ Es fährt RE von x nach y.

Mögliche Anfangs/Endstädte: Es fährt ICE von x zu einer Stadt z
und es fährt ein RE von z nach y.

Gesuchte Relation: $R \circ I$

Hinweis: I und R symmetrisch, $R \circ I$ nicht (glaube ich ...)

.

Relationen

Wäre die Definition $x(R \circ S)y \iff \exists z : xRz \wedge zSy$ sinnvoller?

.

Relationen

Wäre die Definition $x(R\circ S)y \iff \exists z : xRz \wedge zSy$ sinnvoller?

Eigentlich schon, aber ...

.

Relationen

Wäre die Definition $x(R \circ S)y \iff \exists z : xRz \wedge zSy$ sinnvoller?

Eigentlich schon, aber ...

Schreibweisen für Funktionen/Relationen machen Probleme.

.

Relationen

Wäre die Definition $x(R{\circ}S)y \iff \exists z : xRz{\wedge}zSy$ sinnvoller?

Eigentlich schon, aber ...

Schreibweisen für Funktionen/Relationen machen Probleme.

$$y = (f \circ g)(x) \Rightarrow \exists z : y = f(z) \wedge z = g(x)$$

.

Relationen

Wäre die Definition $x(R \circ S)y \iff \exists z : xRz \wedge zSy$ sinnvoller?

Eigentlich schon, aber ...

Schreibweisen für Funktionen/Relationen machen Probleme.

$$y = (f \circ g)(x) \Rightarrow \exists z : y = f(z) \wedge z = g(x)$$

Also $x(f \circ g)y \Rightarrow \exists z : (x, z) \in g \wedge (z, y) \in f$

.

Relationen

Wäre die Definition $x(R \circ S)y \iff \exists z : xRz \wedge zSy$ sinnvoller?

Eigentlich schon, aber ...

Schreibweisen für Funktionen/Relationen machen Probleme.

Merke: Reihenfolge der Relationen andersrum als man zuerst denkt ...

.

Relationen

Wäre die Definition $x(R \circ S)y \iff \exists z : xRz \wedge zSy$ sinnvoller?

Eigentlich schon, aber ...

Schreibweisen für Funktionen/Relationen machen Probleme.

Merke: Reihenfolge der Relationen andersrum als man zuerst denkt ...
es sei denn, man verknüpft Potenzen der gleichen Relation.

.

Relationen

$$xRy \iff y - x = 1$$

$R^2, R^3, \ldots ?$

.

Relationen

$$xRy \iff y - x = 1$$

$R^2, R^3, \ldots$?

$$xR^2y \iff \exists z : xRz \land zRy \iff \exists z : z - x = 1 \land y - z = 1$$

.

Relationen

$xRy \iff y - x = 1$

$R^2, R^3, \ldots$?

$xR^2y \iff \exists z : xRz \wedge zRy \iff \exists z : z - x = 1 \wedge y - z = 1$

Das ist genau dann der Fall, wenn $y - x = 2$ gilt (z ist dann gerade $x + 1$).

.

Relationen

$$xRy \iff y - x = 1$$

$R^2, R^3, \ldots$?

$$xR^3y \iff y - x = 3$$

.

Relationen

$$xRy \iff y - x = 1$$

$$xR^*y \iff x \leq y$$

.

$xRy \iff y - x = 1$

$xR^*y \iff x \leq y$

Beweis: Zeige $\forall n \in \mathbb{N}_0 : xR^ny \iff y - x = n$

.

$xRy \iff y - x = 1$

$xR^*y \iff x \leq y$

Beweis: Zeige $\forall n \in \mathbb{N}_0 : xR^n y \iff y - x = n$

IA: $n = 0$: $xR^0 y \iff x = y \iff y - x = 0$ ✓

IV: Für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:
$xR^n y \Rightarrow y - x = n$.

.

Relationen

$xRy \iff y - x = 1$

$xR^*y \iff x \leq y$

Beweis: Zeige $\forall n \in \mathbb{N}_0 : xR^n y \iff y - x = n$

IS: $n \to n+1$: Zu zeigen: $xR^{n+1}y \iff y - x = n + 1$

.

Relationen

$xRy \iff y - x = 1$

$xR^*y \iff x \leq y$

Beweis: Zeige $\forall n \in \mathbb{N}_0 : xR^n y \iff y - x = n$

IS: $n \to n+1$: Zu zeigen: $xR^{n+1}y \iff y - x = n + 1$

Es gelte $xR^{n+1}y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{N}_0 : xR^n z \land zRy$

.

$xRy \iff y - x = 1$

$xR^*y \iff x \leq y$

Beweis: Zeige $\forall n \in \mathbb{N}_0 : xR^n y \iff y - x = n$

IS: $n \to n + 1$: Zu zeigen: $xR^{n+1}y \iff y - x = n + 1$

Es gelte $xR^{n+1}y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{N}_0 : xR^n z \wedge zRy$
$\overset{IV}{\Rightarrow} \exists z \in \mathbb{N}_0 : z - x = n \wedge zRy$

.

$xRy \iff y - x = 1$

$xR^*y \iff x \leq y$

Beweis: Zeige $\forall n \in \mathbb{N}_0 : xR^ny \iff y - x = n$

IS: $n \to n + 1$: Zu zeigen: $xR^{n+1}y \iff y - x = n + 1$

Es gelte $xR^{n+1}y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{N}_0 : xR^nz \wedge zRy$
$\overset{IV}{\Rightarrow} \exists z \in \mathbb{N}_0 : z - x = n \wedge zRy$
$\Rightarrow \exists z \in \mathbb{N}_0 : z - x = n \wedge y - z = 1$

.

$xRy \iff y - x = 1$

$xR^*y \iff x \leq y$

Beweis: Zeige $\forall n \in \mathbb{N}_0 : xR^ny \iff y - x = n$

IS: $n \to n + 1$: Zu zeigen: $xR^{n+1}y \iff y - x = n + 1$

Es gelte $xR^{n+1}y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{N}_0 : xR^nz \wedge zRy$
$\overset{IV}{\Rightarrow} \exists z \in \mathbb{N}_0 : z - x = n \wedge zRy$
$\Rightarrow \exists z \in \mathbb{N}_0 : z - x = n \wedge y - z = 1$
$\Rightarrow y - x = (y - z) + (z - x) = n + 1$

.

$xRy \iff y - x = 1$

$xR^*y \iff x \leq y$

Beweis: Zeige $\forall n \in \mathbb{N}_0 : xR^n y \iff y - x = n$

IS: $n \to n + 1$: Zu zeigen: $xR^{n+1}y \iff y - x = n + 1$

Es gelte $y - x = n + 1 \Rightarrow xR^n(y - 1) \wedge (y - 1)Ry$
$\Rightarrow \exists z \in \mathbb{N}_0 : xR^n z \wedge zRy \Rightarrow xR^{n+1}y$

.

Relationen

$$xRy \iff y - x = 1$$

$$xR^*y \iff x \leq y$$

$$x \leq y \Rightarrow y - x \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow xR^{y-x}y \Rightarrow xR^*y$$

.

Relationen

$$xRy \iff y - x = 1$$

$$xR^*y \iff x \leq y$$

$$xR^*y \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0 : xR^n y \Rightarrow y - x = n \geq 0 \Rightarrow x \leq y$$

.

Homomorphismen

Das Wichtigste zuerst: Homomorphismen sind **einfach**!

Homomorphismen

Das Wichtigste zuerst: Homomorphismen sind **einfach**!

(Sie haben nur einen abschreckenden Namen ...)

Homomorphismen

Gilt allgemein $f(a+b) = f(a) + f(b)$?

Homomorphismen

Gilt allgemein $f(a+b) = f(a) + f(b)$?

Bei Homomorphismen schon!

Homomorphismen

Gilt allgemein $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$?

Homomorphismen

Gilt allgemein $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$?

Bei Homomorphismen schon!

Homomorphismen

Gilt allgemein $f(w_1w_2) = f(w_1)f(w_2)$?

Homomorphismen

Gilt allgemein $f(w_1w_2) = f(w_1)f(w_2)$?

Bei Homomorphismen schon!

Homomorphismen

Gilt allgemein $f(w_1 w_2) = f(w_1) f(w_2)$?

Bei Homomorphismen schon!

$\rightarrow$ Mit Homomorphismen kann man schön rechnen.

Homomorphismen

f Homomorphismus, das heißt

$f(\epsilon) = \epsilon$
$\forall w \in A^* \forall x \in A : f(wx) = f(w)f(x)$

Homomorphismen

f Homomorphismus, das heißt

$f(\epsilon) = \epsilon$
$\forall w \in A^* \forall x \in A : f(wx) = f(w)f(x)$

Hinweis: Das definiert einen konkreten Homomorphismus noch nicht! Für $x \in A$ ist $f(x)$ nicht festgelegt.

Homomorphismen

f Homomorphismus, das heißt

$f(\epsilon) = \epsilon$
$\forall w \in A^* \forall x \in A : f(wx) = f(w)f(x)$

Zeige: $\forall w_1, w_2 \in A^* : f(w_1 w_2) = f(w_1)f(w_2)$.

Homomorphismen

f Homomorphismus, das heißt

$f(\epsilon) = \epsilon$
$\forall w \in A^* \forall x \in A : f(wx) = f(w)f(x)$

Zeige: $\forall w_1, w_2 \in A^* : f(w_1 w_2) = f(w_1)f(w_2)$.

Induktion über $n = |w_2|$:

IA: $n = 0 : w_2 = \epsilon \Rightarrow f(w_1 w_2) = f(w_1) = f(w_1)f(w_2)$, da $f(\epsilon) = \epsilon$ gilt.

Homomorphismen

f Homomorphismus, das heißt

$f(\epsilon) = \epsilon$
$\forall w \in A^* \forall x \in A : f(wx) = f(w)f(x)$

Zeige: $\forall w_1, w_2 \in A^* : f(w_1 w_2) = f(w_1)f(w_2)$.

Induktion über $n = |w_2|$:

IV:Für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:
$\forall w_1, w_2 \in A^* : |w_2| = n \Rightarrow f(w_1 w_2) = f(w_1)f(w_2)$.

Homomorphismen

f Homomorphismus, das heißt

$f(\epsilon) = \epsilon$
$\forall w \in A^* \forall x \in A : f(wx) = f(w)f(x)$

Zeige: $\forall w_1, w_2 \in A^* : f(w_1 w_2) = f(w_1)f(w_2)$.

Induktion über $n = |w_2|$:

IS: $n \to n+1$: Zu zeigen: $\forall w_1, w_2 \in A^* : |w_2| = n+1 \Rightarrow f(w_1 w_2) = f(w_1)f(w_2)$.

Homomorphismen

f Homomorphismus, das heißt

$f(\epsilon) = \epsilon$
$\forall w \in A^* \forall x \in A : f(wx) = f(w)f(x)$

Zeige: $\forall w_1, w_2 \in A^* : f(w_1 w_2) = f(w_1)f(w_2)$.

Induktion über $n = |w_2|$:

IS: $n \to n+1$: Zu zeigen: $\forall w_1, w_2 \in A^* : |w_2| = n+1 \Rightarrow f(w_1 w_2) = f(w_1)f(w_2)$.

Sei $|w_2| = n+1 \Rightarrow \exists w \in A^n : \exists x \in A : w_2 = wx$

Homomorphismen

f Homomorphismus, das heißt

$f(\epsilon) = \epsilon$
$\forall w \in A^* \forall x \in A : f(wx) = f(w)f(x)$

IS: $n \to n+1$: Zu zeigen: $\forall w_1, w_2 \in A^* : |w_2| = n+1 \Rightarrow f(w_1 w_2) = f(w_1)f(w_2)$.

Sei $|w_2| = n+1 \Rightarrow \exists w \in A^n : \exists x \in A : w_2 = wx$
$\Rightarrow f(w_1 w_2) = f(w_1 wx) = f(w_1 w)f(x) \overset{IV}{=} f(w_1)f(w)f(x) = f(w_1)f(wx) = f(w_1)f(w_2)$ $\square$

Homomorphismen

$f : \{0,1,2\}^* \rightarrow \{0,1\}^*$ mit $\forall w \in \{0,1,2\}^* : Num_3(w) = Num_2(f(w))$

Homomorphismen

$f : \{0,1,2\}^* \to \{0,1\}^*$ mit $\forall w \in \{0,1,2\}^* : Num_3(w) = Num_2(f(w))$

Kann f Homomorphismus sein?

Homomorphismen

$f : \{0,1,2\}^* \to \{0,1\}^*$ mit $\forall w \in \{0,1,2\}^* : Num_3(w) = Num_2(f(w))$

Kann f Homomorphismus sein?

Idee: Einfache Wörter ausprobieren!

Homomorphismen

$f : \{0,1,2\}^* \to \{0,1\}^*$ mit $\forall w \in \{0,1,2\}^* : Num_3(w) = Num_2(f(w))$

Kann f Homomorphismus sein?

$Num_3(1) = Num_2(f(1)) \Rightarrow f(1) \in \{0\}^*\{1\}$

Homomorphismen

$f : \{0,1,2\}^* \to \{0,1\}^*$ mit $\forall w \in \{0,1,2\}^* : Num_3(w) = Num_2(f(w))$

Kann f Homomorphismus sein?

$Num_3(1) = Num_2(f(1)) \Rightarrow f(1) \in \{0\}^*\{1\}$
$Num_3(11) = 4 = Num_2(f(11)) \Rightarrow f(11) \in \{0\}^*\{100\}$

Homomorphismen

$f : \{0,1,2\}^* \rightarrow \{0,1\}^*$ mit $\forall w \in \{0,1,2\}^* : Num_3(w) = Num_2(f(w))$

Kann f Homomorphismus sein?

$Num_3(1) = Num_2(f(1)) \Rightarrow f(1) \in \{0\}^*\{1\}$
$Num_3(11) = 4 = Num_2(f(11)) \Rightarrow f(11) \in \{0\}^*\{100\}$

Annahme: f Homomorphismus.

Homomorphismen

$f : \{0,1,2\}^* \to \{0,1\}^*$ mit $\forall w \in \{0,1,2\}^* : Num_3(w) = Num_2(f(w))$

Kann f Homomorphismus sein?

$Num_3(1) = Num_2(f(1)) \Rightarrow f(1) \in \{0\}^*\{1\}$
$Num_3(11) = 4 = Num_2(f(11)) \Rightarrow f(11) \in \{0\}^*\{100\}$

Annahme: f Homomorphismus.

Dann gilt: $f(11) = f(1)f(1) \in \{0\}^*\{1\}\{0\}^*\{1\}$

Homomorphismen

$f : \{0,1,2\}^* \rightarrow \{0,1\}^*$ mit $\forall w \in \{0,1,2\}^* : Num_3(w) = Num_2(f(w))$

Kann f Homomorphismus sein?

$Num_3(1) = Num_2(f(1)) \Rightarrow f(1) \in \{0\}^*\{1\}$
$Num_3(11) = 4 = Num_2(f(11)) \Rightarrow f(11) \in \{0\}^*\{100\}$

Annahme: f Homomorphismus.

Dann gilt: $f(11) = f(1)f(1) \in \{0\}^*\{1\}\{0\}^*\{1\}$

Dies steht in Widerspruch zu $f(11) \in \{0\}^*\{100\}$

Homomorphismen

$f : \{0,1,2\}^* \to \{0,1\}^*$ mit $\forall w \in \{0,1,2\}^* : Num_3(w) = Num_2(f(w))$

Kann f Homomorphismus sein?

$Num_3(1) = Num_2(f(1)) \Rightarrow f(1) \in \{0\}^*\{1\}$
$Num_3(11) = 4 = Num_2(f(11)) \Rightarrow f(11) \in \{0\}^*\{100\}$

Also gilt: f ist kein Homomorphismus.

Zahlendarstellungen

Was wir benutzt haben:

$Num_2(w_1) = Num_2(w_2) \iff \exists w' \in \{0\}^* : w_1 = w'w_2 \vee w_2 = w'w_1$

Zahlendarstellungen

Was wir benutzt haben:

$Num_2(w_1) = Num_2(w_2) \iff \exists w' \in \{0\}^* : w_1 = w'w_2 \vee w_2 = w'w_1$

Was wir zeigen: $\exists w' \in \{0\}^* : w_1 = w'w_2 \vee w_2 = w'w_1 \Rightarrow Num_2(w_1) = Num_2(w_2)$.

Zahlendarstellungen

Was wir benutzt haben:

$Num_2(w_1) = Num_2(w_2) \iff \exists w' \in \{0\}^* : w_1 = w'w_2 \vee w_2 = w'w_1$

Was wir zeigen: $\exists w' \in \{0\}^* : w_1 = w'w_2 \vee w_2 = w'w_1 \Rightarrow Num_2(w_1) = Num_2(w_2)$.

Was wir wirklich zeigen: $\forall w \in A^* : Num_2(0w) = Num_2(w)$

Zahlendarstellungen

Was wir wirklich zeigen: $\forall w \in A^* : Num_2(0w) = Num_2(w)$

Vollständige Induktion über $n = |w|$:

IA: $n = 0 : w = \epsilon \Rightarrow Num_2(0w) = Num_2(0) =$
$2 \cdot Num_2(\epsilon) + num_2(0) = 0 + 0 = Num_2(\epsilon) = Num_2(w)$ ✓

Zahlendarstellungen

Was wir wirklich zeigen: $\forall w \in A^* : Num_2(0w) = Num_2(w)$

Vollständige Induktion über $n = |w|$:

IV: Für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:
$\forall w \in A^n : Num_2(0w) = Num_2(w)$

Zahlendarstellungen

Was wir wirklich zeigen: $\forall w \in A^* : Num_2(0w) = Num_2(w)$

Vollständige Induktion über $n = |w|$:

IS: $n \to n + 1$: Zu zeigen
$\forall w \in A^{n+1} : Num_2(0w) = Num_2(w)$

Zahlendarstellungen

Was wir wirklich zeigen: $\forall w \in A^* : Num_2(0w) = Num_2(w)$

Vollständige Induktion über $n = |w|$:

IS: $n \to n+1$: Zu zeigen
$\forall w \in A^{n+1} : Num_2(0w) = Num_2(w)$

Sei $w \in A^{n+1} \Rightarrow \exists w' \in A^n \exists x \in A : w = w'x$.

Zahlendarstellungen

Was wir wirklich zeigen: $\forall w \in A^* : Num_2(0w) = Num_2(w)$

Vollständige Induktion über $n = |w|$:

IS: $n \to n+1$: Zu zeigen
$\forall w \in A^{n+1} : Num_2(0w) = Num_2(w)$

Sei $w \in A^{n+1} \Rightarrow \exists w' \in A^n \exists x \in A : w = w'x$.

$Num_2(0w) = Num_2(0w'x) = 2Num_2(0w') + num_2(x) \overset{IV}{=}$
$2Num_2(w') + num_2(x) = Num_2(w'x) = Num_2(w)$ $\square$