Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 5

Aufgabe 5.1 (2+2 Punkte)
Geben Sie jeweils eine kontextfreie Grammatik G_x an, so dass für folgende Sprachen L_x, mit $x \in \{a, b\}$ gilt: $L_x = L(G_x)$.

a) $L_a = L_1^*$, $\quad L_1 = \{w \in \{\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c}\}^* \mid \mathtt{b}^i\mathtt{a}^n\mathtt{b}^j\mathtt{c}^n\mathtt{b}^k, \quad n \in \mathbb{N}_+,\ i, j, k \in \mathbb{N}_0\}$

b) Ein Wort $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ ist genau dann in L_b, wenn das maximal lange Anfangsstück von w, das nur aus $\mathtt{a}$ besteht, und das maximal lange Endstück von w, das nur aus $\mathtt{a}$ besteht, gleiche Länge haben.

Lösung 5.1

a) $G_a = (\{S, X, A, B\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, S, P)$, mit

$$\begin{aligned} P = \{ \quad & S && \to SS \mid X \mid \varepsilon \ , \\ & X && \to \mathtt{b}X \mid X\mathtt{b} \mid A \ , \\ & A && \to \mathtt{a}A\mathtt{c} \mid \mathtt{a}B\mathtt{c} \ , \\ & B && \to \mathtt{b}B \mid \varepsilon \ \}. \end{aligned}$$

b) $G_b = (\{S, A\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, S, P)$, mit

$$\begin{aligned} P = \{ \quad & S && \to \mathtt{a}S\mathtt{a} \mid \mathtt{b}A\mathtt{b} \mid \mathtt{a} \mid \mathtt{b} \mid \varepsilon \ , \\ & A && \to \mathtt{b}A \mid \mathtt{a}A \mid \varepsilon \ \}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5.2 (3+3 Punkte)
Bei der Postfix-Notation werden die Operatoren hinter die Operanden geschrieben.
Beispiel: Statt $(1 + 2) * (2 + 3)$ schreibt man in Postfix-Notation: $1\ 2 + 2\ 3 + *$

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die die Sprache der korrekten arithmetischen Ausdrücke, die nur Addition, Subtraktion und Multiplikation benutzen, über $\mathbb{N}_0$ in Postfix-Notation erzeugt. Benutzen Sie das Alphabet $A = \{\mathtt{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\_,+,-,*}\}$. Das Zeichen _ markiert dabei das Ende einer Zahl.

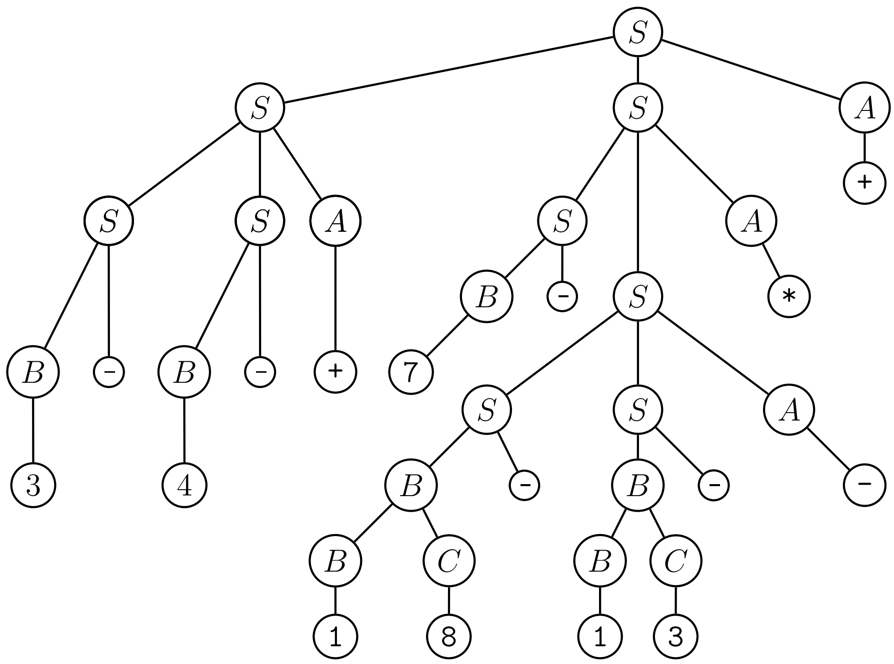
b) Geben Sie für das Wort `3_4_+7_18_13_-*+` einen Ableitungsbaum in Ihrer Grammatik an.

Lösung 5.2

a) $G_a = (\{S, A, B, C\}, \{\texttt{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\_,+,-,*}\}, S, P)$, mit

$$
\begin{array}{lll}
P = \{ & S & \to SSA \mid B\texttt{\_} \mid \texttt{0\_} \ , \\
 & A & \to \texttt{+} \mid \texttt{-} \mid \texttt{*} \ , \\
 & B & \to BC \mid \texttt{1} \mid \texttt{2} \mid \texttt{3} \mid \texttt{4} \mid \texttt{5} \mid \texttt{6} \mid \texttt{7} \mid \texttt{8} \mid \texttt{9} \ , \\
 & C & \to \texttt{0} \mid \texttt{1} \mid \texttt{2} \mid \texttt{3} \mid \texttt{4} \mid \texttt{5} \mid \texttt{6} \mid \texttt{7} \mid \texttt{8} \mid \texttt{9} \ \}.
\end{array}
$$

Hinweis: Hier existiert eine zusätzliche Produktion um führende Nullen zu vermeiden. Sollte das nicht berücksichtig worden sein, gibt es keinen Punktabzug.



b)

Aufgabe 5.3 (6 Punkte)
Gegeben ist die kontextfreie Grammatik $G = (\{S\}, \{\texttt{a}, \texttt{b}\}, S, \{S \to \texttt{ab}S, S \to \varepsilon\})$ und die formale Sprache $L = \{(\texttt{ab})^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.

Zeigen Sie durch vollständige Induktion $L(G) = L$, indem Sie beide Inklusionen beweisen.

Lösung 5.3
Hinweis: Zur Erinnerung: $L(G) = \{w \in T^* \mid S \Rightarrow^* w\}$

- erste Teilmengenrelation $L(G) \subseteq L$, Induktion über Ableitungslänge $\Rightarrow^n$

  Induktionsanfang $n = 1$: Es bedarf mindestens einem Ableitungsschritt, um ein Terminalsymbol zu erzeugen
  $S \Rightarrow^1 \varepsilon = (\mathtt{ab})^0 \surd$ (ε ist das einzige Wort $\in L(G)$, das nach einem Ableitungsschritt erzeugt werden kann)

  Induktionsvoraussetzung:
  Für beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}_+$ gilt:
  $S \Rightarrow^n (\mathtt{ab})^m$, mit $m \in \mathbb{N}_0$

  Induktionsschluss: Wir zeigen, dass dann auch gilt: $S \Rightarrow^{n+1} (\mathtt{ab})^{m'}$
  $S \Rightarrow^{n+1} w \Rightarrow S \Rightarrow^1 w' \Rightarrow^n w$
  Da die nach $n+1$-ableitbaren Wörter $\in L(G)$ betrachtet werden und zudem $n + 1 \geq 2$ gilt, muss nach dem ersten Ableitungsschritt noch ein Nichtterminal vorhanden sein. Als erste Produktionsregel muss also $S \to \mathtt{ab}S$ gewählt werden.
  $\Rightarrow S \Rightarrow^1 \mathtt{ab}S \overset{\text{Ind.vor.}}{\Rightarrow^n} (\mathtt{ab})(\mathtt{ab})^m = (\mathtt{ab})^{m+1} = (\mathtt{ab})^{m'}$ mit $m' \in \mathbb{N}_0$

- zweite Teilmengenrelation $L \subseteq L(G)$, Induktion über Wortlänge $(\mathtt{ab})^n$:

  Induktionsanfang: $n = 0$: $(\mathtt{ab})^0 = \varepsilon$
  $S \Rightarrow \varepsilon \surd$

  Induktionsvoraussetzung:
  Für beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:
  $S \Rightarrow^* (\mathtt{ab})^n$

  Induktionsschluss: Wir zeigen, dass dann auch gilt: $S \Rightarrow^* (\mathtt{ab})^{n+1}$

  $$(\mathtt{ab})^{n+1} = (\mathtt{ab})(\mathtt{ab})^n : S \Rightarrow^1 \mathtt{ab}S \overset{\text{Ind.vor.}}{\Rightarrow^*} \mathtt{ab}(\mathtt{ab})^n = (\mathtt{ab})^{n+1}$$

Aufgabe 5.4 (3+2 Punkte)
Es sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$.

a) Beschreiben Sie unter Benutzung nur der Symbole {, }, a, b, c, ε, $\cup$, * und $^+$, sowie runde Klammer auf, runde Klammer zu und Komma, die folgende formale Sprache:

$L = \{w \in A^* \mid \text{ wenn } \mathtt{a} \text{ in } w \text{ vorkommt, dann auch } \mathtt{b}\}$

Hinweis: Die Verwendung von mehr als 25 Zeichen gibt Punktabzug.

b) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an, so dass $L(G) = L$.

Lösung 5.4

a) $\{\mathtt{b,c}\}^* \cup \{\mathtt{a,c}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a,b,c}\}^*$

Hinweis: Erst ab 30 Zeichen werden Punkte abgezogen: Also sowas wie: $\{\mathtt{b,c}\}^* \cup \{\mathtt{a,b,c}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a,b,c}\}^*$ gibt volle Punkte

b) $G = (\{S, A, B\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, S, P)$, mit

$$\begin{aligned} P = \{ \quad S &\to \mathtt{b}S \mid \mathtt{c}S \mid A \mid \varepsilon \ , \\ A &\to \mathtt{a}A \mid \mathtt{c}A \mid \mathtt{b}B \ , \\ B &\to \mathtt{a}B \mid \mathtt{b}B \mid \mathtt{c}B \mid \varepsilon \ \}. \end{aligned}$$