Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 9

Matr.nr.:

Nachname:

Vorname:

Tutorium: Nr.

Name des Tutors:

Ausgabe: 17. Dezember 2014

Abgabe: 9. Januar 2015, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

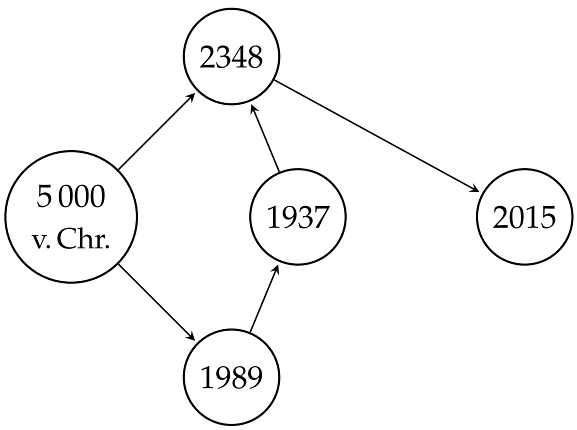
abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 9:	$/\ 20 + 0$
Blätter 1 – 9:	$/\ 154 + 17$

Aufgabe 9.1 (1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8 Punkte)
Der ebenso geniale wie superböse Wissenschaftler Doktor Meta ist zurück! Als wir ihn zuletzt sahen, hatten seine Widersacher, Theorie-Man und der pfiffige Informatikstudent Marvin Faulsson, seine Meta-Zeitmaschine manipuliert und ihn in einen wilden Zeitstrom verbannt. Aber Doktor Meta arbeitet bereits daran, dieses Chaos zu analysieren, und hat festgestellt, dass es Ausgänge in verschiedenen Jahren gibt. (Dargestellt im unten stehenden Graphen $G = (V, E)$.) Er plant, die vierte Dimension durch den Ausgang in 2015 zu verlassen, während ihn seine Erzfeinde für verschollen halten.



a) Geben Sie die Adjazenzmatrix A von G an.
b) Geben Sie die Adjazenzmatrix A' des Graphen $G' = (V, E^2)$ an.
c) Geben Sie die Wegematrix W von G an.
d) Geben Sie die Wegematrix W' von G' an.
e) Zeichnen Sie den Graphen $G'' = (V, E^*)$.
f) Geben Sie die Adjazenzmatrix A'' von G'' an.
g) Von welchen Knoten aus ist 2015 in G erreichbar?

Lösung 9.1

a)

	5000	2348	1937	1989	2015
5000	0	1	0	1	0
2348	0	0	0	0	1
1937	0	1	0	0	0
1989	0	0	1	0	0
2015	0	0	0	0	0

b) Die Adjazenzmatrix A' von G' ist A^2:

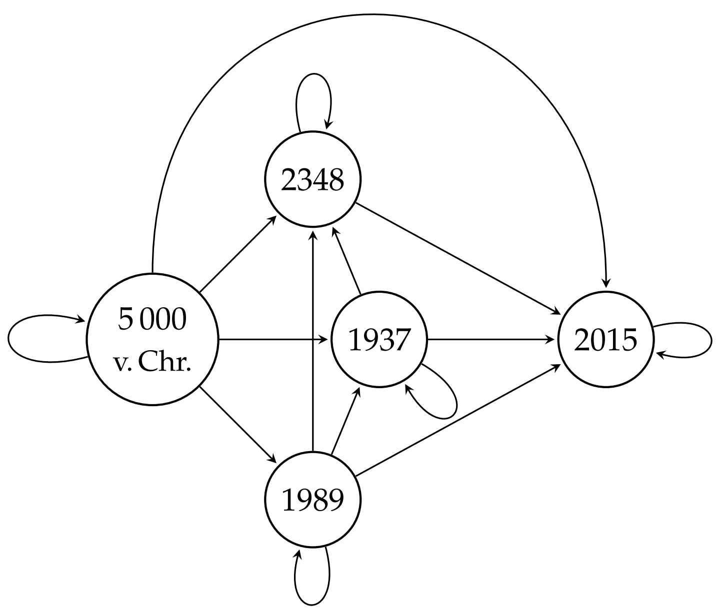
	5000	2348	1937	1989	2015
5000	0	0	1	0	1
2348	0	0	0	0	0
1937	0	0	0	0	1
1989	0	1	0	0	0
2015	0	0	0	0	0

c)

	5000	2348	1937	1989	2015
5000	1	1	1	1	1
2348	0	1	0	0	1
1937	0	1	1	0	1
1989	0	1	1	1	1
2015	0	0	0	0	1

d)

	5000	2348	1937	1989	2015
5000	1	0	1	0	1
2348	0	1	0	0	0
1937	0	0	1	0	1
1989	0	1	0	1	0
2015	0	0	0	0	1



e)

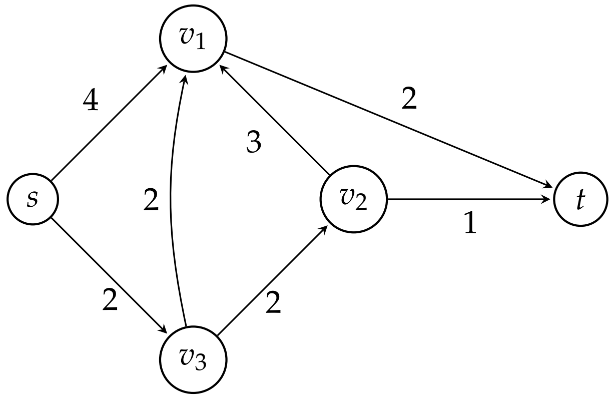
f) Die Adjazenzmatrix A'' von G'' ist die Wegematrix W von G.

g) Der Knoten 2015 ist von jedem Knoten aus erreichbar.

Aufgabe 9.2 (1 + 2 = 3 Punkte)

a) Geben Sie die reflexiv-transitive Hülle der Relation $R = \{(x, x+1) \mid x \in \mathbb{Z}\}$ über $\mathbb{Z}$ an.

b) Der kantengewichtete gerichtete Graph $G = (V, E, m_E)$ sei gegeben durch



Geben Sie einen kürzesten Pfad von s nach t an, wobei die Länge eines Pfades durch die Summe der Gewichte der in ihm enthaltenen Kanten gegeben sei.

Lösung 9.2

a) $R^* = \leq$

b) Der kürzeste Pfad ist (s, v_3, v_2, t). Er hat die Länge 5.

Aufgabe 9.3 (8 + 1 = 9 Punkte)

Es sei $\bar{\mathbb{N}}_0 = \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei $n < \infty$ und $n + \infty = \infty + n = \infty$. Weiter sei $G = (V, E, m_E)$ ein kantenmarkierter gerichteter Graph mit $m_E \colon E \to \mathbb{N}_0$. Ferner sei $s \in V$. Die Abbildungen

$$\begin{aligned} d\colon V &\to \bar{\mathbb{N}}_0, \\ v &\mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } v = s, \\ \infty, & \text{falls } v \neq s, \end{cases} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} m\colon V &\to \{\mathtt{t}, \mathtt{f}\}, \\ v &\mapsto \mathtt{f}, \end{aligned}$$

machen G zu einem zweifach knotenmarkierten Graphen. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ seien der Knoten $w_n \in V$ und die Abbildungen $d_n \colon V \to \bar{\mathbb{N}}_0$ und $m_n \colon V \to \{\mathtt{t}, \mathtt{f}\}$ simultan induktiv definiert durch:

- $w_0 = s$, $d_0 = d$ und $m_0 = m$;
- Für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ sei $w_n \in V$ derart gewählt, dass

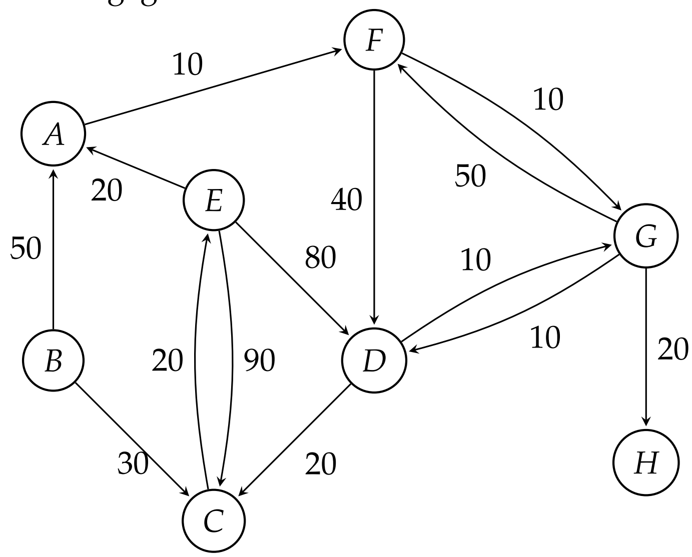
$$m_{n-1}(w_n) = \mathtt{f} \wedge \forall v \in V : (m_{n-1}(v) = \mathtt{f} \implies d_{n-1}(w_n) \leq d_{n-1}(v)),$$

  und es seien d_n und m_n derart, dass für jedes $v \in V$ gilt

$$d_n(v) = \begin{cases} d_{n-1}(w_n) + m_E((w_n, v)), & \text{falls } (w_n, v) \in E \text{ und} \\ & d_{n-1}(w_n) + m_E((w_n, v)) < d_{n-1}(v) \\ d_{n-1}(v), & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$m_n(v) = \begin{cases} \mathtt{t}, & \text{falls } v = w_n, \\ m_{n-1}(v), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nun sei G gegeben durch



und s sei der Knoten E.

a) Geben Sie tabellarisch die Abbildungen d_n und m_n, $n \in \mathbb{Z}_9$, an, wobei die Zeilen $\mathbb{Z}_9$ durchlaufen und die Spalten V:

A	B	C	D	E	F	G	H
∞, f	∞, f	∞, f	∞, f	0, f	∞, f	∞, f	∞, f

b) Erläutern Sie was die Zahlen $d_8(v)$, $v \in V$, angeben.

Lösung 9.3

Obiges ist eine Formalisierung des Algorithmus von Dijkstra. Dieser Algorithmus berechnet die Länge der kürzesten Pfade von einem Startknoten zu jedem anderen Knoten. Der Algorithmus stoppt sobald jeder Knoten die Markierung t trägt. Knoten die dann den Wert ∞ tragen sind nicht vom Startknoten erreichbar.

a)

A	B	C	D	E	F	G	H
∞, f	∞, f	∞, f	∞, f	0, f	∞, f	∞, f	∞, f
20, f	∞, f	90, f	80, f	0, t	∞, f	∞, f	∞, f
20, t	∞, f	90, f	80, f	0, t	30, f	∞, f	∞, f
20, t	∞, f	90, f	70, f	0, t	30, t	40, f	∞, f
20, t	∞, f	90, f	50, f	0, t	30, t	40, t	60, f
20, t	∞, f	70, f	50, t	0, t	30, t	40, t	60, f
20, t	∞, f	70, f	50, t	0, t	30, t	40, t	60, t
20, t	∞, f	70, t	50, t	0, t	30, t	40, t	60, t
20, t	∞, t	70, t	50, t	0, t	30, t	40, t	60, t

b) Für jedes $v \in V$ gibt $d_8(v)$ die Länge des kürzesten Pfades von E nach v an, sofern es einen Pfad von E nach v gibt; andernfalls ist $d_8(v)$ einfach ∞.