Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 10

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr.
	Name des Tutors:

Ausgabe: 7. Januar 2015

Abgabe: 16. Januar 2015, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 10:	$/ \ 17 + 4$
Blätter 1 – 10:	$/ \ 171 + 21$

Aufgabe 10.1 (1+1+2=4 Punkte)

a) Für welche $a \in \mathbb{R}_+$ ist $2^n \in \mathrm{O}(a^n)$?

b) Für welche $a \in \mathbb{R}_+$ ist $2^n \in \Omega(a^n)$?

c) Beweisen Sie Ihre Aussage aus Teil a).

Aufgabe 10.2 (3 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie: Für alle Funktionen $f_1 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ und $f_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ gilt:

$$\Omega(f_1) + \Omega(f_2) = \Omega(f_1 + f_2)$$

Aufgabe 10.3 (1+2+3+2+1+1 = 10 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{Z}_{n+1}$ sei $B(n,k)$ definiert als die Anzahl verschiedener Teilmengen der Größe k, die man von einer endlichen Menge mit n Elementen bilden kann.

Es sei M eine Menge, die genau n Elemente enthält.

a) Welche Teilmengen von M der Größe 0 gibt es? Welche Teilmengen von M der Größe n gibt es?

b) Begründen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $1 \leq k \leq n-1$ gilt:

$$B(n,k) = B(n-1,k-1) + B(n-1,k)$$

Hinweis: Sie müssen nicht unbedingt vollständige Induktion machen. Eine Argumentation, die direkt auf obige Definition Bezug nimmt, ist auch möglich.

c) Geben Sie eine geschlossene Formel für die Funktion $B2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 : n \mapsto B(n,2)$ an und zeigen Sie: $B2(n) \in \mathrm{O}(n^2)$.

d) Beweisen Sie: Für die Funktion $Bm : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 : k \mapsto B(2k,k)$ gilt: $Bm(k) \in \Omega(2^k)$.

e) Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $P_n = (V_n, E_n)$ der gerichtete Graph mit $V_n = \mathbb{Z}_{n+1} \times \mathbb{Z}_{n+1}$ und $E_n = (V_n \times V_n) \cap \{((i,j),(i+1,k)) \mid k = j \vee k = j+1\}$.
Zeichnen Sie P_4 so, dass der Knoten $(0,0)$ am weitesten oben auf dem Papier ist und die Pfeile für die Kanten (senkrecht oder diagonal) nur „nach unten" zeigen.

f) Wieviele Pfade gibt es in P_n im allgemeinen von Knoten $(0,0)$ zu einem Knoten $(i,j) \in V_n$?

***Aufgabe 10.4 (1+1+2 = 4 Extrapunkte)**

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq k \leq n$.

a) Wieviele verschiedene Pfade gibt es im Graph P_{2n} (siehe Aufgabe 10.3) von Knoten (n,k) zu Knoten $(2n,n)$?

b) Begründen Sie Ihre Antwort aus Teilaufgabe a).

c) Beweisen Sie:

$$\sum_{k=0}^{n} B(n,k)^2 = B(2n,n)$$