Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 2

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr.
	Name des Tutors:

Ausgabe: 4. November 2015

Abgabe: 13. November 2015, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 2:	/ 17	(Physik: 14)
Blätter 1 – 2:	/ 30	(Physik: 27)

Mit **[nicht Physik]** gekennzeichnete Aufgaben werden von Studenten der Physik bitte nicht bearbeitet.

Aufgabe 2.1 (3 Punkte) **[nicht Physik]**
Es sei Var_{AL} eine Menge von Aussagevariablen und es sei For_{AL} die Menge aller aussagenlogischen Formeln über Var_{AL}. Beweisen Sie, dass für alle $G, H \in For_{AL}$ die aussagenlogische Formel

$$(G \rightarrow H) \rightarrow (\neg H \rightarrow \neg G)$$

eine Tautologie ist.

Lösung 2.1
Es seien $G, H \in For_{AL}$. Es ist zu zeigen, dass für jede Interpretation $I\colon Var_{AL} \to \mathbb{B}$ gilt:

$$val_I((G \rightarrow H) \rightarrow (\neg H \rightarrow \neg G)) = \mathbf{w}.$$

Dazu sei $I\colon Var_{AL} \to \mathbb{B}$ eine Interpretation. Nach Definition der Abbildung val_I gilt:

$$val_I((G \rightarrow H) \rightarrow (\neg H \rightarrow \neg G)) = \neg val_I(G \rightarrow H) \vee val_I(\neg H \rightarrow \neg G).$$

Nach Definition der Abbildungen val_I und $\vee$ gilt

$$\begin{aligned} val_I(G \rightarrow H) &= \neg val_I(G) \vee val_I(H) \\ &= val_I(H) \vee \neg val_I(G). \end{aligned}$$

Und nach Definition der Abbildungen val_I und $\neg$ gilt

$$\begin{aligned} val_I(\neg H \rightarrow \neg G) &= \neg val_I(\neg H) \vee val_I(\neg G) \\ &= \neg(\neg val_I(H)) \vee \neg(val_I(G)) \\ &= val_I(H) \vee \neg val_I(G). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$val_I((G \rightarrow H) \rightarrow (\neg H \rightarrow \neg G)) = \neg(val_I(H) \vee \neg val_I(G)) \vee (val_I(H) \vee \neg val_I(G)).$$

Fall 1: $val_I(H) \vee \neg val_I(G) = \mathbf{w}$. Nach Definition der Abbildung $\vee$ gilt dann

$$\neg(val_I(H) \vee \neg val_I(G)) \vee (val_I(H) \vee \neg val_I(G)) = \neg \mathbf{w} \vee \mathbf{w} = \mathbf{w}.$$

Fall 2: $val_I(H) \vee \neg val_I(G) = \mathbf{f}$. Nach Definition der Abbildung $\neg$ gilt dann $\neg(val_I(H) \vee \neg val_I(G)) = \mathbf{w}$. Und nach Definition der Abbildung $\vee$ gilt somit

$$\neg(val_I(H) \vee \neg val_I(G)) \vee (val_I(H) \vee \neg val_I(G)) = \mathbf{w} \vee \mathbf{f} = \mathbf{w}.$$

In beiden Fällen gilt

$$val_I((G \to H) \to (\neg H \to \neg G)) = \neg(val_I(H) \vee \neg val_I(G)) \vee (val_I(H) \vee \neg val_I(G)) = \mathbf{w}.$$

Aufgabe 2.2 (2 Punkte)
Es sei A ein Alphabet, und für jede formale Sprache $L \subseteq A^*$ und jede formale Sprache $S \subseteq A^*$ sei

$$L \cdot S = \{u \cdot v \mid u \in L \text{ und } v \in S\}.$$

Es seien ferner L_1, L_2 und L_3 drei formale Sprachen über A. Beweisen Sie, dass gilt:

$$L_1 \cdot (L_2 \cdot L_3) \subseteq (L_1 \cdot L_2) \cdot L_3.$$

Lösung 2.2
Es ist zu zeigen, dass für jedes $w \in L_1 \cdot (L_2 \cdot L_3)$ gilt: $w \in (L_1 \cdot L_2) \cdot L_3$. Dazu sei $w \in L_1 \cdot (L_2 \cdot L_3)$. Dann gibt es ein $u \in L_1$ und ein $v \in L_2 \cdot L_3$ so, dass $w = u \cdot v$. Außerdem gibt es ein $\mu \in L_2$ und ein $\kappa \in L_3$ so, dass $v = \mu \cdot \kappa$. Damit gilt $w = u \cdot (\mu \cdot \kappa)$. Da $\cdot$ assoziativ ist, folgt $w = u \cdot (\mu \cdot \kappa) = (u \cdot \mu) \cdot \kappa$. Es gilt $u \cdot \mu \in L_1 \cdot L_2$ und damit $(u \cdot \mu) \cdot \kappa \in (L_1 \cdot L_2) \cdot L_3$. Wegen $w = (u \cdot \mu) \cdot \kappa$ folgt $w \in (L_1 \cdot L_2) \cdot L_3$.

Aufgabe 2.3 (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6 Punkte)
Es sei A ein Alphabet.

a) Geben Sie eine injektive Abbildung $f\colon A^* \to A^*$ an, die nicht surjektiv ist.
b) Geben Sie eine surjektive Abbildung $g\colon A^* \to A^*$ an, die nicht injektiv ist.
c) Geben Sie eine bijektive Abbildung $h\colon A^* \to A^*$ an, die nicht die identische Abbildung $A^* \to A^*, w \mapsto w$, ist.
d) Geben Sie eine Abbildung $\varphi\colon A^* \to A^*$ so an, dass für jedes $w \in A^*$ gilt:

$$|\varphi(w)| = 2^{|w|} \cdot |w|^{|w|}.$$

e) Geben Sie eine Abbildung $\psi\colon 2^{A^*} \to 2^{A^*}$ so an, dass für jedes $L \in 2^{A^*}$ gilt:

$$\{|w| \mid w \in \psi(L)\} = \{3 \cdot |w| \mid w \in L\}.$$

f) Geben Sie eine Abbildung $\xi\colon 2^{A^*} \to 2^{A^*}$ so an, dass für jedes $L \in 2^{A^*}$ und für jedes $w \in A^*$ gilt:

$$w \in L \text{ genau dann, wenn } w \notin \xi(L).$$

Lösung 2.3
Mögliche Abbildungen sind

a)

$$\begin{aligned} f\colon A^* &\to A^*, \\ w &\mapsto w \cdot w, \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} g\colon A^* &\to A^*, \\ \epsilon &\mapsto \epsilon, \\ x \cdot w &\mapsto w, \text{ wobei } x \in A \text{ und } w \in A^* \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} h\colon A^* &\to A^*, \\ \epsilon &\mapsto \epsilon, \\ w \cdot x &\mapsto x \cdot h(w), \text{ wobei } w \in A^* \text{ und } x \in A \end{aligned}$$

d) Die Aufgabenstellung ist für $w = \varepsilon$ sinnlos. Also

$$\begin{aligned} \varphi\colon A^+ &\to A^*, \\ w &\mapsto (w \cdot w)^{|w \cdot w|^{|w|-1}}, \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \psi\colon 2^{A^*} &\to 2^{A^*}, \\ L &\mapsto \{w \cdot (w \cdot w) \mid w \in L\}, \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} \xi\colon 2^{A^*} &\to 2^{A^*}, \\ L &\mapsto A^* \setminus L. \end{aligned}$$

Aufgabe 2.4 (1,5 + 1,5 + 3 = 6 Punkte)
Sind X und Y zwei Mengen und $f\colon X \to Y$ eine bijektive Abbildung, so ist die Relation

$$R_f = \{(f(x), x) \mid x \in X\}$$

eine bijektive Abbildung von Y nach X, die wir mit f^{-1} bezeichnen, *Umkehrabbildung von f* oder *Inverse von f* nennen, und für die für jedes $x \in X$ und jedes $y \in Y$ gilt:

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ und } f(f^{-1}(y)) = y.$$

Es sei A das Alphabet $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, es sei γ die bijektive Abbildung

$$\begin{aligned} \gamma\colon \mathbb{Z}_3 &\to A, \\ 0 &\mapsto \mathtt{a}, \\ 1 &\mapsto \mathtt{b}, \\ 2 &\mapsto \mathtt{c}, \end{aligned}$$

und es sei $\odot$ die binäre Operation

$$\begin{aligned}\odot\colon A^* \times A^* &\to A^*,\\ (u,v) &\mapsto \begin{cases} u, & \text{falls } u = \epsilon \ \text{ oder } \ v = \epsilon,\\ \gamma((\gamma^{-1}(x) + \gamma^{-1}(y)) \bmod 3) \cdot (\mu \odot \kappa), & \text{falls } u = x \cdot \mu \ \text{ und } \ v = y \cdot \kappa \\ & \text{für } \ x, y \in A \ \text{ und } \ \mu, \kappa \in A^*, \end{cases}\end{aligned}$$

wobei für jede nicht-negative ganze Zahl z der Ausdruck $z \bmod 3$ den Rest der ganzzahligen Division von z mit 3 bezeichne und bei Bedarf Zeichen in A als Wörter der Länge 1 in A^1 aufzufassen sind.

a) Berechnen Sie die Wörter $\mathtt{baac} \odot \mathtt{aaaa}$, $\mathtt{baac} \odot \mathtt{bbbbbb}$ und $\mathtt{baac} \odot \mathtt{cc}$.

b) Es sei

$$\begin{aligned}\delta\colon A &\to A,\\ \mathtt{a} &\mapsto \mathtt{a},\\ \mathtt{b} &\mapsto \mathtt{c},\\ \mathtt{c} &\mapsto \mathtt{b}.\end{aligned}$$

Geben Sie für jedes $u \in A^*$ ein $v \in A^*$ so an, dass $u \odot v = \mathtt{a}^{|u|}$ gilt.

c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\text{Für jedes } w \in A^n\colon w \odot \mathtt{a}^n = w.$$

Lösung 2.4

a) $\mathtt{baac} \odot \mathtt{aaaa} = \mathtt{baac}$, $\mathtt{baac} \odot \mathtt{bbbbbb} = \mathtt{cbba}$ und $\mathtt{baac} \odot \mathtt{cc} = \mathtt{acac}$.

b) Es sei $u \in A^*$ und es sei B der Zielbereich von u. Das Wort

$$\begin{aligned}v\colon \mathbb{Z}_{|u|} &\to \delta(B),\\ i &\mapsto \delta(u(i)),\end{aligned}$$

hat die gewünschte Eigenschaft.

c) *Induktionsanfang*: Es sei $w \in A^0$. Dann ist $w = \epsilon$. Nach Definition von $\odot$ gilt somit $w \odot \mathtt{a}^0 = w$. Insgesamt gilt:

$$\text{Für jedes } w \in A^0\colon w \odot \mathtt{a}^0 = w.$$

Induktionsschritt: Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ so, dass gilt:

$$\text{Für jedes } u \in A^n\colon u \odot \mathtt{a}^n = u. \qquad \text{(Induktionsvoraussetzung)}$$

Weiter sei $w \in A^{n+1}$. Dann gibt es ein $x \in A$ und ein $u \in A^n$ so, dass $x \cdot u = w$. Damit gilt:

$$\begin{aligned}w \odot \mathtt{a}^{n+1} &= (x \cdot u) \odot (\mathtt{a} \cdot \mathtt{a}^n)\\ &= \gamma((\gamma^{-1}(x) + \gamma^{-1}(\mathtt{a})) \bmod 3) \cdot (u \odot \mathtt{a}^n).\end{aligned}$$

Nach Definition von γ, γ^{-1} und $\bmod$ gilt:

$$\begin{aligned}
\gamma((\gamma^{-1}(x) + \gamma^{-1}(\mathtt{a})) \bmod 3) &= \gamma((\gamma^{-1}(x) + 0) \bmod 3) \\
&= \gamma(\gamma^{-1}(x) \bmod 3) \\
&= \gamma(\gamma^{-1}(x)) \\
&= x.
\end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt $u \odot \mathtt{a}^n = u$. Somit gilt:

$$\begin{aligned}
w \odot \mathtt{a}^{n+1} &= \gamma((\gamma^{-1}(x) + \gamma^{-1}(\mathtt{a})) \bmod 3) \cdot (u \odot \mathtt{a}^n) \\
&= x \cdot u \\
&= w.
\end{aligned}$$

Insgesamt gilt:

$$\text{Für jedes } w \in A^{n+1}\colon w \odot \mathtt{a}^{n+1} = w.$$

Schlussworte: Gemäß des Prinzips der vollständigen Induktion gilt die Behauptung.