Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 8

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr.
	Name des Tutors:

Ausgabe: 16. Dezember 2015

Abgabe: 8. Januar 2015, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 8:	/ 18	(Physik: 18)
Blätter 1 – 8:	/ 142	(Physik: 119)

Vorbemerkung. Für alle Aufgaben auf diesem Blatt gelten die folgenden Annahmen, ohne dass sie jedes Mal erneut aufgeführt werden:

- Die Menge der möglichen Werte für eine Variable ist $\mathbb{Z}$, sofern nicht ausdrücklich etwas anderes angegeben ist.
- Alle Variablen sind initialisiert. Der Anfangswert ist aber nicht immer explizit angegeben.
- Zu einer Anweisungsfolge S und einer Nachbedingung Q heißt P eine *schwächste Vorbedingung*, wenn $\{P\}\ S\ \{Q\}$ ein gültiges Hoare-Tripel ist und für jedes gültige Hoare-Tripel $\{P'\}\ S\ \{Q\}$ gilt: P' impliziert P.
- Zu einer Anweisungsfolge S und einer Vorbedingung P heißt Q eine *stärkste Nachbedingung*, wenn $\{P\}\ S\ \{Q\}$ ein gültiges Hoare-Tripel ist und für jedes gültige Hoare-Tripel $\{P\}\ S\ \{Q'\}$ gilt: Q impliziert Q'.

Aufgabe 8.1 (4 Punkte)

Es seien x und y zwei verschiedene Variablen und es seien a und b zwei ganze Zahlen. Bestimmen Sie anhand des Hoare-Kalküls eine schwächste Vorbedingung von

$$\begin{aligned}
&x \leftarrow x + y\\
&x \leftarrow x \cdot x\\
&x \leftarrow x - y\\
&\{x = a \land y = b\}
\end{aligned}$$

indem Sie wiederholt das Zuweisungsaxiom verwenden.

Aufgabe 8.2 (6 Punkte)

Es seien x, y und z drei verschiedene Variablen und es seien a und b zwei ganze Zahlen. Weiter sei

$$\begin{aligned}
\min\colon\ & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\\
& (u, v) \mapsto \begin{cases} u, & \text{falls } u < v,\\ v, & \text{falls } u \geq v,\end{cases}
\end{aligned}$$

und es sei

$$\begin{aligned}
\max\colon\ & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\\
& (u, v) \mapsto u + v - \min(u, v).
\end{aligned}$$

Beweisen Sie anhand des Hoare-Kalküls, dass das Hoare-Tripel

$$
\begin{aligned}
&\{x = a \wedge y = b\}\\
&\textbf{if } x > y \textbf{ then}\\
&\qquad z \leftarrow x\\
&\qquad x \leftarrow y\\
&\qquad y \leftarrow z\\
&\textbf{else}\\
&\qquad x \leftarrow x\\
&\textbf{fi}\\
&\{x = \min(a,b) \wedge y = \max(a,b)\}
\end{aligned}
$$

gültig ist.

Aufgabe 8.3 (8 Punkte)
Für jede positive ganze Zahl $n \in \mathbb{N}_+$ ist der ganzzahlige binäre Logarithmus von n, geschrieben $\lfloor \log_2 n \rfloor$, jene nicht-negative ganze Zahl $k \in \mathbb{N}_0$, für die $2^k \leq n < 2^{k+1}$ gilt.

Es seien x, y und z drei verschiedene Variablen. Beweisen Sie anhand des Hoare-Kalküls und mithilfe einer Schleifeninvariante, dass das Hoare-Tripel

$$
\begin{aligned}
&\{x \geq 1\}\\
&z \leftarrow 0\\
&y \leftarrow 1\\
&\textbf{while } 2 \cdot y \leq x \textbf{ do}\\
&\qquad z \leftarrow z + 1\\
&\qquad y \leftarrow 2 \cdot y\\
&\textbf{od}\\
&\{z = \lfloor \log_2 x \rfloor\}
\end{aligned}
$$

gültig ist.

Hinweis: Die Nachbedingung $z = \lfloor \log_2 x \rfloor$ ist äquivalent zu $2^z \leq x < 2^{z+1}$.