Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 8

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr.
	Name des Tutors:

Ausgabe:	16. Dezember 2015
Abgabe:	8. Januar 2015, 12:30 Uhr im GBI-Briefkasten im Untergeschoss von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 8:	/ 18	(Physik: 18)
Blätter 1 – 8:	/ 142	(Physik: 119)

Vorbemerkung. Für alle Aufgaben auf diesem Blatt gelten die folgenden Annahmen, ohne dass sie jedes Mal erneut aufgeführt werden:

- Die Menge der möglichen Werte für eine Variable ist $\mathbb{Z}$, sofern nicht ausdrücklich etwas anderes angegeben ist.
- Alle Variablen sind initialisiert. Der Anfangswert ist aber nicht immer explizit angegeben.
- Zu einer Anweisungsfolge S und einer Nachbedingung Q heißt P eine *schwächste Vorbedingung*, wenn $\{P\}\ S\ \{Q\}$ ein gültiges Hoare-Tripel ist und für jedes gültige Hoare-Tripel $\{P'\}\ S\ \{Q\}$ gilt: P' impliziert P.
- Zu einer Anweisungsfolge S und einer Vorbedingung P heißt Q eine *stärkste Nachbedingung*, wenn $\{P\}\ S\ \{Q\}$ ein gültiges Hoare-Tripel ist und für jedes gültige Hoare-Tripel $\{P\}\ S\ \{Q'\}$ gilt: Q impliziert Q'.

Aufgabe 8.1 (4 Punkte)

Es seien x und y zwei verschiedene Variablen und es seien a und b zwei ganze Zahlen. Bestimmen Sie anhand des Hoare-Kalküls eine schwächste Vorbedingung von

$$\begin{aligned}&x \leftarrow x + y\\&x \leftarrow x \cdot x\\&x \leftarrow x - y\\&\{x = a \wedge y = b\}\end{aligned}$$

indem Sie wiederholt das Zuweisungsaxiom verwenden.

Lösung 8.1

Eine schwächste Vorbedingung ist $((x+y)\cdot(x+y)) - y = a \wedge y = b$.

Gemäß des Zuweisungsaxioms sind die folgenden Hoare-Tripel ableitbar:

$$\begin{aligned}&\{x - y = a \wedge y = b\}\\&x \leftarrow x - y\\&\{x = a \wedge y = b\}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&\{(x \cdot x) - y = a \wedge y = b\}\\&x \leftarrow x \cdot x\\&\{x - y = a \wedge y = b\}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&\{((x+y)\cdot(x+y)) - y = a \wedge y = b\}\\&x \leftarrow x + y\\&\{x \cdot x - y = a \wedge y = b\}\end{aligned}$$

Gemäß der Sequenzenregel ist das folgende Hoare-Tripel ableitbar:

$$\{((x+y)\cdot(x+y)) - y = a \wedge y = b\}$$
$$x \leftarrow x + y$$
$$x \leftarrow x \cdot x$$
$$x \leftarrow x - y$$
$$\{x = c \wedge y = d\}$$

Somit ist $((x+y)\cdot(x+y)) - y = a \wedge y = b$ eine Vorbedingung. Und diese ist tatäschlich eine schwächste.

Alternativ alles hintereinander weg:

$$\{((x+y)\cdot(x+y)) - y = a \wedge y = b\}$$
$$x \leftarrow x + y$$
$$\{x \cdot x - y = a \wedge y = b\}$$
$$x \leftarrow x \cdot x$$
$$\{x - y = a \wedge y = b\}$$
$$x \leftarrow x - y$$
$$\{x = a \wedge y = b\}$$

Statt $\{((x+y)\cdot(x+y)) - y = a \wedge y = b\}$ kann natürlich auch etwas Äquivalentes stehen.

Aufgabe 8.2 (6 Punkte)

Es seien x, y und z drei verschiedene Variablen und es seien a und b zwei ganze Zahlen. Weiter sei

$$\begin{aligned} \min\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}, \\ (u, v) &\mapsto \begin{cases} u, & \text{falls } u < v, \\ v, & \text{falls } u \geq v, \end{cases} \end{aligned}$$

und es sei

$$\begin{aligned} \max\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}, \\ (u, v) &\mapsto u + v - \min(u, v). \end{aligned}$$

Beweisen Sie anhand des Hoare-Kalküls, dass das Hoare-Tripel

$$
\begin{aligned}
&\{x = a \land y = b\} \\
&\textbf{if } x > y \textbf{ then} \\
&\qquad z \leftarrow x \\
&\qquad x \leftarrow y \\
&\qquad y \leftarrow z \\
&\textbf{else} \\
&\qquad x \leftarrow x \\
&\textbf{fi} \\
&\{x = \min(a, b) \land y = \max(a, b)\}
\end{aligned}
$$

gültig ist.

Lösung 8.2
Gemäß des Zuweisungsaxioms sind die folgenden Hoare-Tripel ableitbar:

$$
\begin{aligned}
&\{x = \min(a, b) \land z = \max(a, b)\} \\
&y \leftarrow z \\
&\{x = \min(a, b) \land y = \max(a, b)\}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
&\{y = \min(a, b) \land z = \max(a, b)\} \\
&x \leftarrow y \\
&\{x = \min(a, b) \land z = \max(a, b)\}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
&\{y = \min(a, b) \land x = \max(a, b)\} \\
&z \leftarrow x \\
&\{y = \min(a, b) \land z = \max(a, b)\}
\end{aligned}
$$

Gemäß der Sequenzenregel ist das folgende Hoare-Tripel ableitbar:

$$
\begin{aligned}
&\{y = \min(a, b) \land x = \max(a, b)\} \\
&z \leftarrow x \\
&x \leftarrow y \\
&y \leftarrow z \\
&\{x = \min(a, b) \land y = \max(a, b)\}
\end{aligned}
$$

Die Vorbedingung dieses Hoare-Tripels wird impliziert von $x = a \land y = b \land x > y$. Gemäß der Verstärkungs- und Abschwächungsregel ist das folgende Hoare-

Tripel ableitbar:

$$\{x = a \land y = b \land x > y\}$$
$$z \leftarrow x$$
$$x \leftarrow y$$
$$y \leftarrow z$$
$$\{x = \min(a,b) \land y = \max(a,b)\}$$

Gemäß des Zuweisungsaxioms ist das folgende Hoare-Tripel ableitbar:

$$\{x = \min(a,b) \land y = \max(a,b)\}$$
$$x \leftarrow x$$
$$\{x = \min(a,b) \land y = \max(a,b)\}$$

Die Vorbedingung dieses Hoare-Tripels wird impliziert von $x = a \land y = b \land \neg(x > y)$. Gemäß der Verstärkungs- und Abschwächungsregel ist das folgende Hoare-Tripel ableitbar:

$$\{x = a \land y = b \land \neg(x > y)\}$$
$$x \leftarrow x$$
$$\{x = \min(a,b) \land y = \max(a,b)\}$$

Gemäß der Verzweigungsregel ist das folgende Hoare-Tripel ableitbar:

$\{x = a \land y = b\}$
if $x > y$ **then**
    $z \leftarrow x$
    $x \leftarrow y$
    $y \leftarrow z$
else
    $x \leftarrow x$
fi
$\{x = \min(a,b) \land y = \max(a,b)\}$

Da ausschließlich gültige Hoare-Tripel ableitbar sind, ist obiges Hoare-Tripel gültig.

Aufgabe 8.3 (8 Punkte)
Für jede positive ganze Zahl $n \in \mathbb{N}_+$ ist der ganzzahlige binäre Logarithmus von n, geschrieben $\lfloor \log_2 n \rfloor$, jene nicht-negative ganze Zahl $k \in \mathbb{N}_0$, für die $2^k \leq n < 2^{k+1}$ gilt.

Es seien x, y und z drei verschiedene Variablen. Beweisen Sie anhand des

Hoare-Kalküls und mithilfe einer Schleifeninvariante, dass das Hoare-Tripel

$$
\begin{array}{l}
\{x \geq 1\} \\
z \leftarrow 0 \\
y \leftarrow 1 \\
\textbf{while } 2 \cdot y \leq x \textbf{ do} \\
\quad z \leftarrow z + 1 \\
\quad y \leftarrow 2 \cdot y \\
\textbf{od} \\
\{z = \lfloor \log_2 x \rfloor\}
\end{array}
$$

gültig ist.

Hinweis: Die Nachbedingung $z = \lfloor \log_2 x \rfloor$ ist äquivalent zu $2^z \leq x < 2^{z+1}$.

Lösung 8.3

Gemäß des Zuweisungsaxioms sind die folgenden Hoare-Tripel ableitbar:

$$
\begin{array}{l}
\{x \geq 1 \land 1 = 1 \land z = 0\} \\
y \leftarrow 1 \\
\{x \geq 1 \land y = 1 \land z = 0\}
\end{array}
$$

und

$$
\begin{array}{l}
\{x \geq 1 \land 1 = 1 \land 0 = 0\} \\
z \leftarrow 0 \\
\{x \geq 1 \land 1 = 1 \land z = 0\}
\end{array}
$$

Gemäß der Sequenzenregel ist das folgende Hoare-Tripel ableitbar:

$$
\begin{array}{l}
\{x \geq 1 \land 1 = 1 \land 0 = 0\} \\
z \leftarrow 0 \\
y \leftarrow 1 \\
\{x \geq 1 \land y = 1 \land z = 0\}
\end{array}
$$

Die Vorbedingung dieses Hoare-Tripels wird impliziert von $x \geq 1$. Gemäß der Verstärkungs- und Abschwächungsregel ist das folgende Hoare-Tripel ableitbar:

$$
\begin{array}{l}
\{x \geq 1\} \\
z \leftarrow 0 \\
y \leftarrow 1 \\
\{x \geq 1 \land y = 1 \land z = 0\}
\end{array}
$$

Um zu beweisen, dass das Hoare-Tripel aus der Aufgabenstellung ableitbar, insbesondere gültig, ist, genügt es, gemäß der Sequenzenregel, zu beweisen, dass das folgende Hoare-Tripel ableitbar ist:

$$
\begin{array}{l}
\{x \geq 1 \land y = 1 \land z = 0\} \\
\textbf{while } 2 \cdot y \leq x \textbf{ do} \\
\quad z \leftarrow z + 1 \\
\quad y \leftarrow 2 \cdot y \\
\textbf{od} \\
\{z = \lfloor \log_2 x \rfloor\}
\end{array}
$$

Dazu raten wir die Schleifeninvariante $y = 2^z \land y \leq x$. Diese Formel ist tatsächlich eine Schleifeninvariante, da durch zweifache Anwendung des Zuweisungsaxioms und einfache Anwendung der Sequenzenregel folgt, dass

$$
\begin{array}{l}
\{2 \cdot y = 2^{z+1} \land 2 \cdot y \leq x\} \\
z \leftarrow z + 1 \\
y \leftarrow 2 \cdot y \\
\{y = 2^z \land y \leq x\}
\end{array}
$$

ableitbar ist, und durch einfach Anwendung der Verstärkungs- und Abschwächungsregel folgt, dass

$$
\begin{array}{l}
\{y = 2^z \land y \leq x \land 2 \cdot y \leq x\} \\
z \leftarrow z + 1 \\
y \leftarrow 2 \cdot y \\
\{y = 2^z \land y \leq x\}
\end{array}
$$

ableitbar ist. Gemäß der Schleifeninvariantenregel ist das folgende Hoare-Tripel ableitbar:

$$
\begin{array}{l}
\{y = 2^z \land y \leq x\} \\
\textbf{while } 2 \cdot y \leq x \textbf{ do} \\
\quad z \leftarrow z + 1 \\
\quad y \leftarrow 2 \cdot y \\
\textbf{od} \\
\{y = 2^z \land y \leq x \land \neg(2 \cdot y \leq x)\}
\end{array}
$$

Die Vorbedingung dieses Hoare-Tripels wird impliziert von $x \geq 1 \land y = 1 \land z = 0$ und die Nachbedingung impliziert $2^z \leq x < 2^{z+1}$, also gemäß der Hinweises $z = \lfloor \log_2 x \rfloor$. Gemäß der Verstärkungs- und Abschwächungsregel ist das folgende Hoare-Tripel ableitbar:

$$
\begin{array}{l}
\{x \geq 1 \land y = 1 \land z = 0\} \\
\textbf{while } 2 \cdot y \leq x \textbf{ do} \\
\qquad z \leftarrow z + 1 \\
\qquad y \leftarrow 2 \cdot y \\
\textbf{od} \\
\{z = \lfloor \log_2 x \rfloor\}
\end{array}
$$

Alternativ notiert alles hintereinander weg:

$$
\begin{array}{l}
\{x \geq 1\} \\
\{1 = 2^0 \land 1 \leq x\} \\
z \leftarrow 0 \\
\{1 = 2^z \land 1 \leq x\} \\
y \leftarrow 1 \\
\{y = 2^z \land y \leq x\} \\
\textbf{while } 2 \cdot y \leq x \textbf{ do} \\
\qquad \{y = 2^z \land y \leq x \land 2 \cdot y \leq x\} \\
\qquad \{2 \cdot y = 2^{z+1} \land 2 \cdot y \leq x\} \\
\qquad z \leftarrow z + 1 \\
\qquad \{2 \cdot y = 2^z \land 2 \cdot y \leq x\} \\
\qquad y \leftarrow 2 \cdot y \\
\qquad \{y = 2^z \land y \leq x\} \\
\textbf{od} \\
\{y = 2^z \land y \leq x \land \neg(2 \cdot y \leq x)\} \\
\{y = 2^z \land y \leq x \land x < 2 \cdot y\} \\
\{2^z \leq x < 2^{z+1}\} \\
\{z = \lfloor \log_2 x \rfloor\}
\end{array}
$$