Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 10

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr.
	Name des Tutors:

Ausgabe: 13. Januar 2015

Abgabe: 22. Januar 2015, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 10:	/ 16	(Physik: 16)
Blätter 1 – 10:	/ 175	(Physik: 152)

Aufgabe 10.1 (4 Punkte)
Es sei $T = (V, E)$ ein gerichteter Baum und es sei r die Wurzel von T. Beweisen Sie, dass es keine Zyklen in T gibt.

Lösung 10.1
Angenommen es gibt einen Zyklus z in T. Bezeichne den Start- und Zielknoten von z mit v. Da T ein Baum ist, gibt es einen Pfad p von r nach v. Der Pfad p', der zunächst entlang p von r nach v läuft und dann entlang z von v nach v, ist ein Pfad von r nach v. Da Zyklen mindestens die Länge 1 haben, ist p' länger als p, also insbesondere verschieden von p. Somit gibt es zwei Pfade von r nach v, im Widerspruch zur Definition von Bäumen.

Aufgabe 10.2 (4 Punkte)
Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und es sei $G' = (V, E^*)$, wobei E^* die reflexiv-transitive Hülle von E ist. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$, jeden Knoten $v \in V$ und jeden Knoten $w \in V$ genau dann $(v, w) \in E^n$ gilt, wenn es in G einen Pfad der Länge n von v nach w gibt.

Lösung 10.2

Induktionsanfang. Es seien v, $w \in V$. Es gilt $(v, w) \in E^0$ genau dann, wenn $v = w$ gilt. Und es gilt $v = w$ genau dann, wenn es in G einen Pfad der Länge 0 von v nach w gibt.

Induktionsschritt. Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ derart, dass für jedes $v \in V$ und jedes $w' \in V$ genau dann $(v, w') \in E^n$ gilt, wenn es in G einen Pfad der Länge n von v nach w' gibt (Induktionsvoraussetzung). Weiter seien v, $w \in V$. Es gilt $(v, w) \in E^{n+1} = E^n \circ E$ genau dann, wenn es ein $w' \in V$ gibt so, dass $(v, w') \in E^n$ und $(w', w) \in E$. Die rechte Seite gilt nach Induktionsvoraussetzung genau dann, wenn es ein $w' \in V$ gibt so, dass es in G einen Pfad der Länge n von v nach w' gibt und $(w', w) \in E$ gilt. Die rechte Seite gilt genau dann, wenn es in G einen Pfad der Länge $n + 1$ von v nach w gibt.

Aufgabe 10.3 (4 Punkte)
Es sei $G = (V, E)$ ein kantenmarkierter, zusammenhängender und ungerichteter Graph mit Markierungsabbildung $m_E \colon E \to \mathbb{N}_0$. Ein Teilgraph $G' = (V', E')$ von G heißt genau dann *Spannbaum von G*, wenn G' ein ungerichteter Baum ist und $V' = V$ gilt. Ein Spannbaum $G' = (V', E')$ von G heißt genau dann *minimal*, wenn für jeden anderen Spannbaum $G'' = (V'', E'')$ von G gilt:

$$\sum_{e'' \in E''} m_E(e'') \geq \sum_{e' \in E'} m_E(e').$$

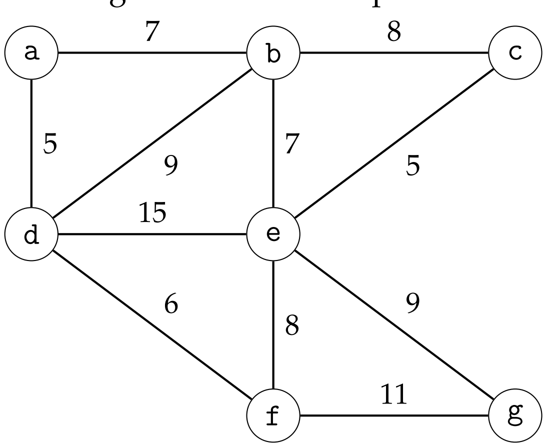
Der folgende „Algorithmus“ berechnet einen minimalen Spannbaum $G' = (V', E')$

von G:

> wähle $x_0 \in V$
> $V' \leftarrow \{x_0\}$
> $E' \leftarrow \{\}$
> $i \leftarrow 1$
> **while** $V \setminus V' \neq \{\}$ **do**
>   wähle $x_i \in V'$ und $y_i \in V \setminus V'$ derart, dass $\{x_i, y_i\} \in E$ und
> $\forall x \in V' \; \forall y \in V \setminus V' \colon \big(\{x,y\} \in E \to m_E(\{x,y\}) \geq m_E(\{x_i,y_i\})\big)$
> $V' \leftarrow V' \cup \{y_i\}$
> $E' \leftarrow E' \cup \{\{x_i, y_i\}\}$
> $i \leftarrow i + 1$
> **od**

Hinweis: An den beiden Stellen, an denen *„wähle"* steht, ist es für die Korrektheit des Verfahrens nicht wichtig, welche Wahl man trifft, sofern sie den angegebenen Bedingungen entspricht.

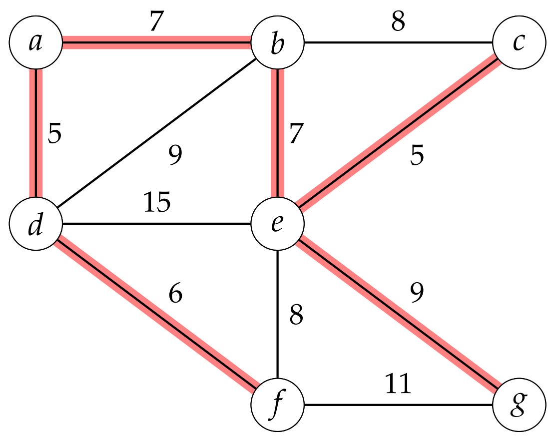
Geben Sie die Werte der Variablen x_k und y_k, für $k \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$, nach der Berechnung des minimalen Spannbaums des Graphen



mit dem obigen Algorithmus an, wobei im allerersten Schritt als x_0 der Knoten `a` gewählt werde.

Lösung 10.3
$x_1 = \texttt{a}$, $y_1 = \texttt{d}$, $x_2 = \texttt{d}$, $y_2 = \texttt{f}$, $x_3 = \texttt{a}$, $y_3 = \texttt{b}$, $x_4 = \texttt{b}$, $y_4 = \texttt{e}$, $x_5 = \texttt{e}$, $y_5 = \texttt{c}$, $x_6 = \texttt{e}$, $y_6 = \texttt{g}$

In der folgenden Darstellung bilden alle Knoten zusammen mit den rot hinterlegten Kanten den minimalen Spannbaum, den der Algorithmus mit der Wahl $x_0 = \texttt{a}$ berechnet:



Aufgabe 10.4 (4 Punkte)
Es sei $G = (\mathbb{Z}_n, E)$ ein gerichteter Graph und es sei A die Adjazenzmatrix von G. Wir nummerieren die Zeilen und Spalten von A mit 0 beginnend durch und bezeichnen für jedes $i \in \mathbb{Z}_n$ und jedes $j \in \mathbb{Z}_n$ mit $A_{i,j}$ den Eintrag von A in der i-ten Zeile und j-ten Spalte. Die Matrix A heißt genau dann

- *hohl*, wenn
$$\forall i \in \mathbb{Z}_n \colon A_{i,i} = 0;$$
- *symmetrisch*, wenn
$$\forall i \in \mathbb{Z}_n \; \forall j \in \mathbb{Z}_n \colon A_{i,j} = A_{j,i};$$
- *strikte obere Dreiecksmatrix*, wenn
$$\forall i \in \mathbb{Z}_n \; \forall j \in \mathbb{Z}_{i+1} \colon A_{i,j} = 0;$$
- *hohle* (2×2)-*Blockmatrix*, wenn
$$\exists k \in \mathbb{Z}_n \colon (\forall (i,j) \in \mathbb{Z}_k^2 \colon A_{i,j} = 0) \wedge (\forall (i,j) \in (\mathbb{Z}_n \setminus \mathbb{Z}_k)^2 \colon A_{i,j} = 0).$$

Der Graph G heißt genau dann

- *bipartit*, wenn es zwei Teilmengen A und B von V gibt so, dass $A \cap B = \{\}$ und $E \subseteq (A \times B) \cup (B \times A)$;
- *zyklenfrei* oder *DAG*, wenn es keine Zyklen in G gibt;
- *schlingenfrei*, wenn es keine Schlingen in G gibt;
- *richtungslos*, wenn für jedes $(v, w) \in E$ gilt $(w, v) \in E$.

Beantworten Sie mit jeweils einem Wort die folgenden Fragen:

a) Falls A eine strikte obere Dreiecksmatrix ist, welche der oben genannten Eigenschaften hat G?
b) Falls A eine hohle (2×2)-Blockmatrix ist, welche der oben genannten Eigenschaften hat G?
c) Falls G schlingenfrei ist, welche der oben genannten Eigenschaften hat A?
d) Falls G richtungslos ist, welche der oben genannten Eigenschaften hat A?

Lösung 10.4
a) zyklenfrei b) bipartit c) hohl d) symmetrisch