Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 2

Matr.nr.: | | | | | | |

Nachname:

Vorname:

Tutorium: Nr. Name des Tutors:

Ausgabe: 9. November 2016

Abgabe: 24. November 2016, 16:00 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 2:	/ 38	(4 ECTS: 38)
Blätter 1 – 2:	/ 57	(4 ECTS: 57)

Aufgabe 2.1 (4 Punkte)
Es sei $A = \{a, b, c, d\}$. Eine Folge formaler Sprachen L_n sei wie folgt definiert:

$$L_0 = \{\epsilon\}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : L_{n+1} = \{ab\} \cdot L_n \cdot \{cd\}$$

Außerdem sei $L = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i$.
Beweisen Sie durch vollständige Induktion die folgende Aussage:
$\forall i \in \mathbb{N}_0 : (ab)^i(cd)^i \in L$

Aufgabe 2.2 (4 Punkte)
Es sei Var_{AL} eine Menge von Aussagevariablen und es sei For_{AL} die Menge aller aussagenlogischen Formeln über Var_{AL}. Beweisen Sie, dass für alle $G, H \in For_{AL}$ die aussagenlogische Formel

$$(\neg H \rightarrow \neg G) \rightarrow (G \rightarrow H)$$

eine Tautologie ist. Verwenden Sie nicht das aussagenlogische Kalkül, sondern arbeiten Sie mit der Definition der Auswertung von aussagenlogischen Formeln und den boolschen Funktionen.

Aufgabe 2.3 (4 Punkte)
Stellen Sie für folgende aussagenlogische Formel eine Wahrheitstabelle auf:

$$((\neg A \rightarrow B) \wedge (\neg(C \leftrightarrow B) \vee A))$$

Aufgabe 2.4 (1+6+1+3+1=12 Punkte)
Sei A ein Alphabet. Die Abbildung $R\colon A^* \to A^*$ sei wie folgt definiert:

$$R(\epsilon) = \epsilon$$
$$\forall x \in A : R(x) = x$$
$$\forall w \in A^* \ \forall x \in A \ \forall y \in A : R(xwy) = yR(w)x$$

a) Berechnen Sie $R(cbffddbcab)$.
b) Beweisen Sie: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \forall w \in A^n : |R(w)| = |w|$
c) Geben Sie ein Wort e der Länge 9 an, so dass gilt: $R(w) = w$
d) Für ein bestimmtes Alphabet A, wieviele Wörter der Länge 9 gibt es, für die gilt: $R(w) = w$
e) Geben Sie eine umgangssprachliche Beschreibung dessen an, was die Abbildung R macht.

Aufgabe 2.5 (1 + 1 + 1 + 1 = 4 Punkte)
Gegeben sei eine Abbildung $g : X \to Y$ mit $g(x) = x^2$. Wählen Sie geeignete Räume $X, Y \in \{\mathbb{R}^+, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$, so dass gilt:

a) g ist injektiv, aber nicht surjektiv.
b) g ist surjektiv, aber nicht injektiv.
c) g ist weder injektiv noch surjektiv.
d) g ist bijektiv.

Beweisen Sie jeweils, dass Ihre Lösung stimmt.

Aufgabe 2.6 (1,5 + 1,5 + 4 = 7 Punkte)

Sind X und Y zwei Mengen und $f\colon X \to Y$ eine bijektive Abbildung, so ist die Relation

$$R_f = \{(f(x), x) \mid x \in X\}$$

eine bijektive Abbildung von Y nach X, die wir mit f^{-1} bezeichnen, *Umkehrabbildung von f* oder *Inverse von f* nennen, und für die für jedes $x \in X$ und jedes $y \in Y$ gilt:

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ und } f(f^{-1}(y)) = y.$$

Es sei A das Alphabet $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, es sei γ die bijektive Abbildung

$$\begin{aligned}\gamma\colon \mathbb{Z}_3 &\to A,\\ 0 &\mapsto \mathtt{a},\\ 1 &\mapsto \mathtt{b},\\ 2 &\mapsto \mathtt{c},\end{aligned}$$

und es sei $\odot$ die binäre Operation

$$\begin{aligned}&\odot\colon A^* \times A^* \to A^*,\\ &\qquad (u, v) \mapsto \begin{cases} u, & \text{falls } u = \epsilon \ \text{ oder } \ v = \epsilon,\\ \gamma((\gamma^{-1}(x) + \gamma^{-1}(y)) \bmod 3) \cdot (\mu \odot \kappa), & \text{falls } u = x \cdot \mu \ \text{ und } \ v = y \cdot \kappa\\ & \text{für } \ x, y \in A \ \text{ und } \ \mu, \kappa \in A^*,\end{cases}\end{aligned}$$

wobei für jede nicht-negative ganze Zahl z der Ausdruck $z \bmod 3$ den Rest der ganzzahligen Division von z mit 3 bezeichne und bei Bedarf Zeichen in A als Wörter der Länge 1 in A^1 aufzufassen sind.

a) Berechnen Sie die Wörter $\mathtt{baac} \odot \mathtt{bbbb}$, $\mathtt{caab} \odot \mathtt{bbbbbb}$ und $\mathtt{baacc} \odot \mathtt{cc}$.
b) Es sei

$$\begin{aligned}\delta\colon A &\to A,\\ \mathtt{a} &\mapsto \mathtt{a},\\ \mathtt{b} &\mapsto \mathtt{c},\\ \mathtt{c} &\mapsto \mathtt{b}.\end{aligned}$$

Geben Sie für jedes $u \in A^*$ ein $v \in A^*$ so an, dass $u \odot v = \mathtt{a}^{|u|}$ gilt.
c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\text{Für jedes } w \in A^n\colon w \odot \mathtt{a}^n = w.$$

Aufgabe 2.7 (3 Punkte)
Zeigen Sie durch vollständige Induktion: $2^n > n^2$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 5$.