Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 5

Matr.nr.:

Nachname:

Vorname:

Tutorium: Nr. Name des Tutors:

Ausgabe: 23. Dezember 2016

Abgabe: 19. Januar 2017, 16:00 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 5:	/ 34	(4 ECTS: 28)
Blätter 1 – 5:	/ 171,5	(4 ECTS: 134,5)

Aufgabe 5.1 **(2 + 2 + 2 = 6 Punkte)**
Formulieren Sie die folgenden Aussagen als Formeln in Prädikatenlogik:

a) Wenn ein Vogel nicht fliegen kann, dann können nicht alle Vögel fliegen.
b) Was Donald Ervin Knuth nicht kann, kann keiner.
c) John mag jeden, der älter als 22 Jahre und der niemanden mag, der jünger als 22 Jahre ist.

Anmerkung: Die Alphabete der Konstantensymbole, Variablensymbole, Funktionssymbole und Relationssymbole müssen Sie nicht explizit angeben, da diese implizit aus den Formeln hervorgehen.

Aufgabe 5.2 **(1 + 1 + 2 + 2 = 6 Punkte)** **[nicht Physik]**
Es seien $Const_{PL} = \{\}$, $Var_{PL} = \{\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}\}$, $Fun_{PL} = \{\mathtt{f}\}$ und $Rel_{PL} = \{\mathtt{E}\}$ mit $\mathrm{ar}(\mathtt{E}) = 2$, $\mathrm{ar}(\mathtt{f}) = 2$ und es sei F die prädikatenlogische Formel

$$\forall \mathtt{x}(\mathtt{E}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \to \neg \exists \mathtt{z}(\mathtt{E}(\mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{z}),\mathtt{y}) \wedge \mathtt{E}(\mathtt{y},\mathtt{z})))$$

a) Geben Sie all jene Variablen an die frei und all jene die gebunden in F vorkommen.
b) Geben sie eine Substitution σ an, die *nicht* kollisionsfrei für F ist.
c) Geben Sie eine Interpretation (D_1, I_1) und eine Variablenbelegung β_1 so an, dass $val_{D_1,I_1,\beta_1}(F) = \mathbf{w}$ gilt.
d) Geben Sie eine Interpretation (D_2, I_2) und eine Variablenbelegung β_2 so an, dass $val_{D_2,I_2,\beta_2}(F) = \mathbf{f}$ gilt.

Aufgabe 5.3 **(3 Punkte)**
Seien $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}_+$. Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn $x \equiv_m y$, dann $x \mathtt{\ mod\ } m = y \mathtt{\ mod\ } m$

Aufgabe 5.4 **(3 Punkte)**
Für die folgenden, aus der Mathematik bekannten Relationen, geben Sie jeweils an, ob die Relation reflexiv, transitiv, symmetrisch und eine Äquivalenzrelation ist: $<, \leq, >, \geq, =, \neq$

Aufgabe 5.5 **(4 Punkte)**
Es seien x, y und z drei verschiedene Variablen und es sei a eine ganze Zahlen. Bestimmen Sie anhand des Hoare-Kalküls eine schwächste Vorbedingung von

$$\begin{array}{l}
z \leftarrow x \mathtt{\ div\ } y \\
u \leftarrow x \mathtt{\ mod\ } y \\
z \leftarrow z * y + u \\
y \leftarrow x - z \\
\{x = a \wedge y = 0 \wedge z = a\}
\end{array}$$

indem Sie wiederholt das Zuweisungsaxiom und die anderen Regeln des Hoare-

Kalküls verwenden.

Aufgabe 5.6 (1 + 1 + 1 = 3 Punkte)

a) Was kann man über den größten und den kleinsten Ausgangsgrad der Knoten eines gerichteten Graphen mit 4 Knoten sagen, bei dem der Knoten mit dem höchstens Eingangsgrad den Eingangsgrad 4 hat?
b) Was kann man über den größten und den kleinsten Ausgangsgrad der Knoten eines gerichteten Graphen mit 4 Knoten sagen, bei dem der Knoten mit dem höchstens Eingangsgrad den Eingangsgrad 3 hat?
c) Was kann man über den größten und den kleinsten Eingangsgrad der Knoten eines gerichteten Graphen mit 3 Knoten sagen, der zwei Kanten hat.

Aufgabe 5.7 (6 Punkte)

Gegeben Sei folgender Algorithmus mit Grundbereich $\mathbb{N}_0$, also $I(n) \in \mathbb{N}_0$

$$
\begin{array}{l}
i \leftarrow 0 \\
j \leftarrow 0 \\
X \leftarrow 1 \\
Y \leftarrow 1 \\
Z \leftarrow 1 \\
C \leftarrow 1 \\
U \leftarrow n \\
\textbf{while } i < n \textbf{ do} \\
\quad i \leftarrow i + 1 \\
\quad j \leftarrow i \\
\quad X \leftarrow X * i \\
\quad Z \leftarrow X \\
\quad Y \leftarrow i + 1 \\
\quad Y \leftarrow X * Y \\
\quad \textbf{while } j < 2 * i \textbf{ do} \\
\quad\quad j \leftarrow j + 1 \\
\quad\quad Z \leftarrow Z * j \\
\quad \textbf{od} \\
\quad C \leftarrow Z \texttt{ div } (X * Y) \\
\textbf{od}
\end{array}
$$

Geben Sie für die äußere und die innere while-Schleife jeweils die Schleifeninvariante an. Was berechnet der Algorithmus?

Aufgabe 5.8 (3 Punkte)

Sei $G = \neg P \to (P \to P)$ eine aussagenlogische Formel. Leiten Sie im Aussagenkalkül ab: $\vdash G$.