Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 10
Lösungsvorschläge

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium Nr.:	
Tutor*in:	

Ausgabe: 20. Dezember 2019

Abgabe: 14. Januar 2020, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie
- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 10:	/ 21
Blätter 7 – 10:	/ 80

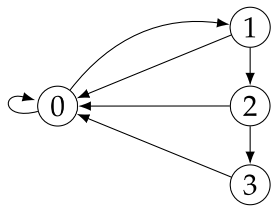
Aufgabe 10.1 (1 + 1 + 2 = 4 Punkte)
Es sei $\texttt{R}$ ein zweistelliges Relationssymbol. Ferner seien die folgenden prädikatenlogischen Formeln gegeben:

a) $F_1 = \exists \texttt{x}\, \forall \texttt{y}\, \texttt{R(y,x)}$
b) $F_2 = \exists \texttt{x}\, (\texttt{R(x,x)} \wedge \forall \texttt{y}\, \texttt{R(x,y)})$
c) $F_3 = \exists \texttt{x}\, \forall \texttt{y}\, (\neg\, \texttt{y} \doteq \texttt{x} \rightarrow \forall \texttt{z}\, (\texttt{R(x,y)} \wedge (\texttt{R(y,z)} \rightarrow \texttt{x} \doteq \texttt{z})))$

Geben Sie für $i \in \{1,2,3\}$ einen gerichteten *und streng zusammenhängenden* Graphen $G_i = (V_i, E_i)$ mit 4 oder 5 Knoten (d. h. $4 \le |V_i| \le 5$) sowie höchstens 10 Kanten (d. h. $|E_i| \le 10$) an, sodass die Interpretation (D_i, I_i) mit $D_i = V_i$ und $I_i(\texttt{R}) = E_i$ Modell von F_i ist. Begründen Sie jeweils, warum (D_i, I_i) tatsächlich Modell von F_i ist.

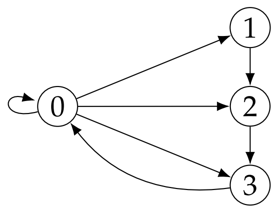
Lösung 10.1

a) G_1:



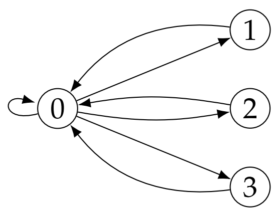
Das ist Modell von F_1, weil für jeden Knoten $v \in V_1$ gilt: $(v, 0) \in E_1$.

b) G_2:



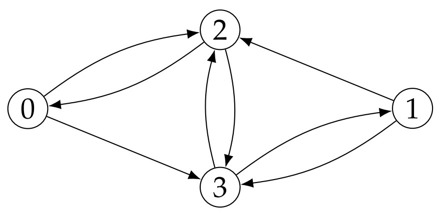
Das ist Modell von F_2, weil $(0,0) \in E_2$ ist und $(0, v) \in E$ für jedes $v \in E_2$ gilt.

c) G_3:



Das ist Modell von F_3, weil $(0, v) \in E_3$ für jedes $v \in V_3$ ist und für jedes $u \in V_3$ mit $u \neq 0$ nur dann $(u, u') \in E_3$ gilt, wenn $u' = 0$ ist.

Aufgabe 10.2 (1 + 1 + 2 = 4 Punkte)
Es sei G folgender Graph:



a) Geben Sie die Adjazenzmatrix A von G an.

Es sei nun $f\colon V \to \mathbb{Z}$ eine Funktion und es bezeichne x den Spaltenvektor, d. h. die 4×1-Matrix,

$$x = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie Ax.

c) Geben Sie eine konkrete Abbildung $f\colon V \to \mathbb{Z}$, die nicht konstant gleich Null ist (d. h., es ist $f(v) \neq 0$ für mindestens ein $v \in V$), sowie eine Zahl $\lambda \in \mathbb{Z}$ mit $Ax = \lambda x$ an, d. h. es gilt:

$$A \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda f(0) \\ \lambda f(1) \\ \lambda f(2) \\ \lambda f(3) \end{pmatrix}$$

Tipp. Wenn Ihre Adjazenzmatrix richtig ist, dann muss für jedes solche λ gelten: $|\lambda| < 5$.

Lösung 10.2

a)

$$A = \begin{array}{c} \\ {\scriptstyle 0} \\ {\scriptstyle 1} \\ {\scriptstyle 2} \\ {\scriptstyle 3} \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

b)

$$Ax = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(2) + f(3) \\ f(2) + f(3) \\ f(0) + f(3) \\ f(1) + f(2) \end{pmatrix}$$

c) Es gibt so ein f nur für $\lambda \in \{-1, 0, 2\}$:
- $\lambda = -1$: $f(0) = -1$, $f(1) = -1$, $f(2) = 0$, $f(3) = 1$
  oder $f(0) = -1$, $f(1) = -1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 0$
- $\lambda = 0$: $f(0) = -1$, $f(1) = 1$, $f(2) = -1$, $f(3) = 1$
- $\lambda = 2$: $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 1$

Man erhält weitere Lösungen, indem man die Funktionswerte von f (alle) mit einer Konstante $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ multipliziert.

Aufgabe 10.3 (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

Geben Sie für jedes $i \in \{1, 2, 3\}$ und jedes $n \in \mathbb{N}_+$, $n \geq 2$, eine Kantenmenge $E_i = E_{i,n} \subseteq V_n \times V_n$ an, sodass der (gerichtete) Graph $G_i = G_{i,n} = (V_n, E_i)$ mit $V_n = \mathbb{Z}_n$ *schlingenfrei* ist und folgende Eigenschaft hat:

a) G_1: für jedes $v \in V_n$ ist $d^+(v) = 1$

b) G_2: für jedes $v \in V_n$ ist $d^-(v) = v$

c) G_3: für jedes $v \in V_n$ ist $d^+(v) \neq d^-(v)$ und $d(v) \geq 1$

Verwenden Sie bei Ihrer Definition von E_i keine „Pünktchen“ und achten Sie darauf, dass G_i keine Schlingen enthält. Begründen Sie anschließend jeweils, warum Ihr G_i die geforderte Eigenschaft hat.

Lösung 10.3

a) $E_1 = \{(u, v) \in V_n \times V_n \mid (u+1) \textbf{ mod } n = v\}$
   E_1 ist (nicht nur eine Relation sondern auch) eine Abbildung, also ist $d^+(v) = 1$ für jedes $v \in V_n$.

b) $E_2 = \{(u, v) \in V_n \times V_n \mid u < v\}$
   Für jedes $v \in V_n$ ist $|\{u \in V_n \mid u < v\}| = |\mathbb{Z}_v| = v$, also folgt $d^-(v) = v$.

c) $E_3 = \{(u, v) \in V_n \times V_n \mid u \text{ ist gerade und } v \text{ ist ungerade}\}$
   Es ist $n \geq 2$, also $0, 1 \in V_n$. Für $u \in V_n$ gerade ist damit $d^+(u) > 0$ und $d^-(u) = 0$ und für $v \in V_n$ ungerade gilt $d^+(v) = 0$ und $d^-(v) > 0$ (und es gilt sowohl $d(u) \geq 1$ als auch $d(v) \geq 1$).

Aufgabe 10.4 (1.5 + 1 + 1.5 = 4 Punkte)

Es sei $G = (V, E)$ ein schlingenfreier, ungerichteter Graph. Eine Menge $C \subseteq V$ heißt *Co-Clique* von G, wenn für jede zwei Knoten $u, v \in C$ mit $u \neq v$ gilt: $\{u, v\} \notin E$.

a) Geben Sie einen schlingenfreien, ungerichteten Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ mit $|V_1| = 7$ an, sodass G_1 zusammenhängend ist und eine Co-Clique C maximaler Größe enthält (d. h., ist $G_1' = (V_1', E_1')$ ebenfalls ein schlingenfreier und zusammenhängender ungerichteter Graph mit $|V_1'| = 7$, so gilt für jede Co-Clique C' von G_1': $|C'| \leq |C|$).

Es sei jetzt für $n \in \mathbb{N}_+$ der Graph $T_n = (V_n, E_n)$ mit $V_n = \{i \in \mathbb{N}_+ \mid i \leq n\}$ gegeben, wobei E_n wie folgt rekursiv definiert ist:

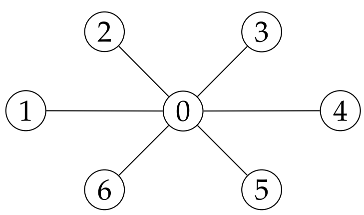
$$E_1 = \varnothing \qquad \text{und} \qquad E_{n+1} = E_n \cup \{\ \{(n+1) \textbf{ div } 2, n+1\}\ \}$$

b) Zeichnen Sie T_{10}. Beschriften Sie alle Knoten.

c) Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ zwei Co-Cliquen $C_n, D_n \subseteq V_n$ an, sodass $C_n \cap D_n = \varnothing$ und $C_n \cup D_n = V_n$ ist.
   Tipp. Anhand der Binärdarstellung (ohne führende Nullen) eines Knoten $v \in V_n$ lässt sich leicht identifizieren, zu welcher der zwei Co-Cliquen v gehört.

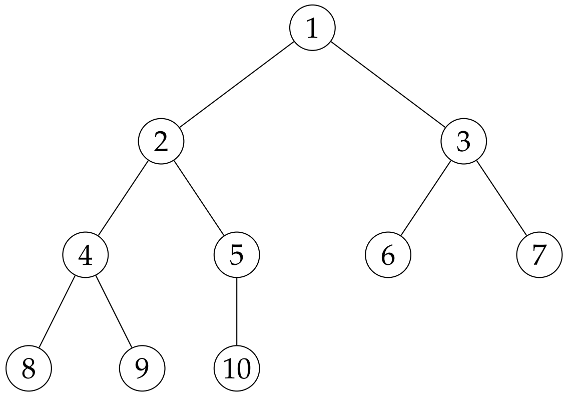
Lösung 10.4

a) G_1:



   wobei $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

b) T_{10}:



c) $C_n = \{v \in V_n \mid |\mathrm{bin}(v)| \text{ gerade}\}$ und $D_n = V_n \setminus C_n$

Aufgabe 10.5 (1 + 2 = 3 Punkte)
Es sei M eine nichtleere Menge und $R \subseteq M \times M$ eine Relation auf M. In Aufgabe 7.5 haben Sie kennengelernt, dass eine R-Clique eine Menge $C \subseteq M$ ist, für die für jedes x und y aus C gilt: $x\,R\,y$.

a) Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn $|M| > 1$ und R reflexiv und symmetrisch ist, dann gibt es eine R-Clique C mit mindestens zwei Elementen (d. h. $|C| \geq 2$).
b) Nehmen wir jetzt an, es gäbe zwei R-Cliquen C_1 und C_2 mit $M = C_1 \cup C_2$ und $C_1 \cap C_2 = \varnothing$. Zeigen oder widerlegen Sie: R ist dann eine Äquivalenzrelation (also reflexiv, symmetrisch, und transitiv).

Lösung 10.5

a) Die Aussage ist **falsch**.
Wenn $R = \mathrm{I}_M$, dann ist R reflexiv und symmetrisch, jede R-Clique enthält aber genau ein Element.
Die Aussage ist aber *fast* richtig; denn das ist das einzelne Gegenbeispiel. Fordert man nämlich noch $R \neq \mathrm{I}_M$, dann gibt es $x, y \in M$ und $x \neq y$, sodass $(x, y) \in R$ ist. Weil R reflexiv und symmetrisch ist, so ist dann $C = \{x, y\}$ eine R-Clique (mit mindestens zwei Elementen).
b) Die Aussage ist **falsch**.
R ist dann zwar zwangsweise reflexiv (weil jedes Element $x \in M$ dann einer der zwei Cliquen C_1 und C_2 gehören muss und damit $(x, x) \in R$ gilt), muss aber weder symmetrisch noch transitiv sein, z. B. $M = \{1, 2, 3\}$, $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{2, 3\}$, und $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$.