Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 11
Lösungsvorschläge

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium Nr.:	Tutor*in:

Ausgabe: 10. Januar 2020

Abgabe: 21. Januar 2020, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie
- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 11:	/ 21
Blätter 7 – 11:	/ 101

Hinweis: Auf den Aufgabenblättern 7 bis 12 wird man insgesamt genau 120 Punkte erreichen können. Wer den Übungsschein erwerben will, kann dies also nur dann sicher schaffen, wenn in diesem zweiten Teil mindestens 60 Punkte erreicht werden. Es *kann* sein (muss aber nicht), dass am Ende die Punktegrenze etwas gesenkt wird.

Aufgabe 11.1 (1.5 + 1.5 = 3 Punkte)
Es seien beliebige Funktionen $f, g \colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_+$ gegeben. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Wenn $\log f(n) \asymp g(n)$, dann $f(n) \asymp 2^{g(n)}$.
b) Wenn $f(n) \asymp 2^{g(n)}$ und $g(n) \asymp 1$, dann $\log f(n) \asymp g(n)$.

Hinweis. Mit „log" ist der Logarithmus zur Basis 2 gemeint.

Lösung 11.1

a) Die Behauptung ist **falsch**. Z. B. für $f(n) = 2^n$ und $g(n) = 2n$ ist $\log f(n) = n \asymp 2n = g(n)$ aber $f(n) = 2^n \not\asymp 4^n = 2^{2n} = 2^{g(n)}$.
b) Die Behauptung ist **falsch**. Ist z. B. $f(n) = g(n) = 1$, dann auch $f(n) \asymp 2^{g(n)} = 2$. Es gilt aber $\log f(n) = 0 \not\asymp 1$.
Hinweis für Interessierte:
Die Behautpung ist übrigens **richtig**, falls $g(n) \not\asymp 1$ ist:
Weil $f(n) \asymp 2^{g(n)}$, so gibt es $c, c' \in \mathbb{R}_+$ und $n_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $c2^{g(n)} \leq f(n) \leq c'2^{g(n)}$ für jedes $n \geq n_0$. Logarithmieren ergibt $g(n) + \log c \leq \log f(n) \leq g(n) + \log c'$ für $n \geq n_0$.
Ferner gilt $g(n) \in \mathbb{N}_+$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$, also $g(n) \geq 1$ und damit $g \in \Omega(1)$. Weil aber $g(n) \notin \Theta(1) = \Omega(1) \cap O(1)$, so folgt $g(n) \notin O(1)$. Damit gibt es insbesondere $n_0' \in \mathbb{N}_0$ mit $g(n) \geq -2 \log c$ für $n \geq n_0'$. (Der interessante Fall ist dabei $0 < c < 1$.)
Für $n \geq n_0'' = \max\{n_0, n_0'\}$ gilt dann

$$\log f(n) \geq g(n) + \log c \geq g(n) - \frac{1}{2}g(n) = \frac{1}{2}g(n)$$

sowie (nochmals wegen $g(n) \geq 1$)

$$\log f(n) \leq g(n) + \log c' \leq g(n) + g(n) \log c' = (1 + \log c')g(n)$$

und es folgt also $\log f(n) \asymp g(n)$.

Aufgabe 11.2 (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)
Für Funktionen $f, g \colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ sei $f(n)^{O(g(n))}$ die Menge der Abbildungen $h \colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ mit $h(n) = f(n)^{k(n)}$ für ein $k \in O(g)$. Gehen Sie für diese Aufgabe davon aus, dass $0^0 = 1$ ist.

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie immer gelten oder nicht. Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $n + O(n) = O(n + n)$ b) $O(n^1) = n^{O(1)}$ c) $O(2^n) = 2^{O(n)}$

Lösung 11.2

a) Die Aussage ist **falsch**, weil z. B. für $f(n) = \frac{1}{2}n$ ist $f \in O(n + n) = O(n)$ aber $f(n) < n + g(n)$ (und insbesondere $f(n) \neq n + g(n)$) für jedes $g \in O(n)$, das heißt, $f \notin n + O(n)$.
b) Die Aussage ist **falsch**, weil z. B. für $f(n) = n^2$ ist $f \in n^{O(1)}$ aber $f \notin O(n^1)$.

c) Die Aussage ist **falsch**, weil z. B. ist $f(n) = 2^{2n} \in 2^{O(n)}$ (da $2n \in O(n)$) aber $f(n) = 4^n \notin O(2^n)$.

Aufgabe 11.3 (1 + 1 + 2 = 4 Punkte)

In dieser Aufgabe haben alle Funktionen als Zielbereich (nur) die Menge $\mathbb{R}_+$ der *positiven* reellen Zahlen. Eine Funktion $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_+$ heißt *monoton wachsend*, wenn $f(n) \geq f(n')$ für $n > n'$ ist. Zudem heißt f *streng monoton wachsend*, wenn $f(n) > f(n')$ für $n > n'$ ist.

a) Zeigen Sie: Wenn f monoton wachsend ist, dann gilt $f \in \Omega(1)$.

b) Geben Sie eine Funktion $g\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_+$ mit $g \in \Omega(1)$ an, die nicht monoton wachsend ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Zeigen Sie: Wenn f streng monoton wachsend und $f(n) \in \mathbb{N}_+$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist, dann gilt $f \in \Omega(n)$.
Tipp. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $f(n) \geq n$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist.

Lösung 11.3

a) Wenn f monoton wachsend ist, dann gilt $f(n) \geq f(0)$ für alle $n \geq 0$ und $f(0) > 0$ nach Voraussetzung. Also ist $f(n) \geq c \cdot 1$ für $c = f(0)$.

b) Z. B. $g(0) = 2$ und für $n \geq 1$: $g(n) = 1$. Das ist nicht streng monoton wachsend, da $g(0) > g(1)$ ist. Es gilt aber $g \in \Omega(1)$, weil $g(n) \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist.

c) IA: $f(0) > 0$ nach Voraussetzung. IS: Sei $f(n) \geq n$. Dann

$$\begin{array}{lll} & f(n+1) > f(n) & \text{wegen strikter Monotonie} \\ & \geq n & \text{nach IV} \\ \text{also} & f(n+1) > n & \\ \text{also} & f(n+1) \geq n+1 & \text{da } f(n+1) \in \mathbb{N}_0 \end{array}$$

Also gilt für $c = 1$ und $\forall n \geq 0 : f(n) \geq c \cdot n$.

Aufgabe 11.4 (0.5 + 0.5 + 1.5 + 1.5 = 4 Punkte)

Es sei $A = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$. Ferner sei für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ der gerichtete Graph $T_n = (V_n, E_n)$ mit $V_n = \{w \in A^* \mid |w| \leq n\}$ gegeben, wobei E_n wie folgt rekursiv festgelegt ist:

$$E_0 = \varnothing \qquad \text{und} \qquad E_{n+1} = E_n \cup \{(w, wx) \mid w \in A^n, x \in A\}$$

Geben Sie für jede der folgenden Funktionen $f_i\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ jeweils ein $g_i\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ an, das dazu asymptotisch gleich schnell wächst (d. h., für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ gilt jeweils $f_i \asymp g_i$). Für die g_i dürfen Sie nur Konstanten, die Grundrechenarten, Logarithmen, und Exponentialfunktionen und deren Kompositionen verwenden. Die Variable soll n heißen.

a) $f_1\colon n \mapsto \min\{d(v) \mid v \in V_n\}$

b) $f_2\colon n \mapsto \max\{d(v) \mid v \in V_n\}$

c) $f_3\colon n \mapsto |\{v \in V_n \mid d^+(v) = 0\}|$

d) $f_4\colon n \mapsto \max\{i \in \mathbb{N}_0 \mid \exists x, y \in V_n : (x, y) \in E_n^i\}$

Lösung 11.4

Hinweis. Die Graphen T_n sind die vollständigen balancierten binären Bäume der Höhe n. Gefragt waren in den Teilaufgaben:

a) minimaler Knotengrad

b) maximaler Knotengrad

c) Anzahl Blätter

d) Länge längster Pfade

a) $g_1(n) = 1$
b) $g_2(n) = 1$
c) $g_3(n) = 2^n$
d) $g_4(n) = n$

Aufgabe 11.5 (4 Punkte)
Es sei $a = 2$, $b = 8$, $c \geq 0$ und $T\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ rekursiv wie folgt für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ definiert:

$$T(0) = 0, \qquad T(n) = aT\left(\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor\right) + n^c$$

Geben Sie die asymptotische Abschätzung, die das Master-Theorem für $T(n)$ liefert, in Abhängigkeit von c an. Begründen Sie Ihre Antwort. Rechtfertigen Sie, warum gegebenenfalls die zusätzlichen Voraussetzungen im 3. Fall des Master-Theorems erfüllt sind.

Lösung 11.5
Sei $r = \log_b a = \frac{1}{3}$. Es gibt drei Fälle:

- $c < r$. Dann ist $n^c \in O\left(n^{r-\varepsilon}\right)$ für $\varepsilon = r - c > 0$. Es trifft also der 1. Fall des Master-Theorems zu: $T(n) \in \Theta\left(n^r\right)$.
- $c = r$. Dann ist $n^c = n^r \in \Theta\left(n^r\right)$, also trifft der 2. Fall des Master-Theorems zu: $T(n) \in \Theta\left(n^r \log n\right)$.
- $c > r$. Es gilt dann $n^c \in \Omega\left(n^{r+\varepsilon}\right)$ für $\varepsilon = c - r > 0$. Die zusätzliche Bedingung für den 3. Fall des Master-Theorems ist auch erfüllt: Wegen $8^c > 8^r = 2$ gilt für $d = \frac{2}{8^c}$: $0 < d < 1$. Und $2(n/8)^c = 2/(8^c) \cdot n^c \leq dn^c$.
  Nach dem 3. Fall des Master-Theorems erhält man: $T(n) \in \Theta\left(n^c\right)$.