Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 5
Lösungsvorschläge

Tutorium Nr.:		Tutor*in:	
Matr.nr. 1:			
Nach-,Vorname 1:		,	
Matr.nr. 2:			
Nach-,Vorname 2:		,	

Ausgabe: 2. Dezember 2020

Abgabe: 15. Dezember 2020, 12:00 Uhr
durch Hochladen in den Ilias-Kurs

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- handschriftlich erstellt sind und
- rechtzeitig
- mit dieser Seite als Deckblatt
- gescannt oder fotografiert mit allen Seiten in *einer* Pdf-Datei

ins Ilias-System hochgeladen werden.

Vom Tutor auszufüllen: erreichte Punkte

Blatt 5:	/ 17	Blätter 1 – 5, Stud. 1:	/ 97
		Blätter 1 – 5, Stud. 2:	/ 97

Hinweis: Auf den ersten 6 Aufgabenblättern wird man insgesamt genau 120 Punkte erreichen können. Wer den Übungsschein erwerben will, kann dies also nur dann sicher schaffen, wenn auf den ersten 6 Aufgabenblättern mindestens 60 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 5.1 (2 Punkte)
Es seien A, B, und C Alphabete und $h_1\colon A^* \to B^*$ sowie $h_2\colon B^* \to C^*$ Homomorphismen. Zeigen Sie, dass $h_3 = h_2 \circ h_1$ ebenfalls ein Homomorphismus ist.

Lösung 5.1
Es seien $x, y \in A^*$ beliebig. Dann gilt:

$$h_3(xy) = h_2(h_1(xy)) = h_2(h_1(x)h_1(y)) = h_2(h_1(x))h_2(h_1(y)) = h_3(x)h_3(y).$$

Aufgabe 5.2 (1 + 3 = 4 Punkte)
Es seien A und B beliebige Alphabete. Ein *Anti-Homomorphismus* sei eine Abbildung $h\colon A^* \to B^*$ mit folgender Eigenschaft: Für jede $x, y \in A^*$ gilt $h(xy) = h(y)h(x)$.

a) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass ein *surjektiver* Anti-Homomorphismus h auch ein Homomorphismus ist. In Ihrer Bedingung darf dabei das Zeichen „h“ nirgends vorkommen.
Tipp. Ihre Bedingung darf nicht nur von h, sondern auch von A bzw. B abhängen.
b) Beweisen Sie, dass Ihre Bedingung die in a) verlangte Eigenschaft hat.

Lösung 5.2

a) $|B| = 1$
b) Die Abbildung h sei gegeben und h sei ein Anti-Homomorphismus und zudem noch surjektiv. Wir zeigen, dass die Bedingung $|B| = 1$ sowohl hinreichend als auch notwendig dafür ist, dass h ein Homomorphismus ist:

hinreichend: Es sei $|B| = 1$ und ohne Einschränkung $B = \{\mathtt{a}\}$. Für jedes $w \in A^*$ gibt es damit ein festes $n_w \in \mathbb{N}_0$, sodass $h(w) = \mathtt{a}^{n_w}$ ist. Damit gilt für $x, y \in A^*$ beliebig:

$$h(xy) = h(y)h(x) = \mathtt{a}^{n_y}\mathtt{a}^{n_x} = \mathtt{a}^{n_y+n_x} = \mathtt{a}^{n_x}\mathtt{a}^{n_y} = h(x)h(y).$$

notwendig: Es sei h ein Homomorphismus. Wir zeigen: Wenn $z_1, z_2 \in B$ Zeichen sind, dann ist $z_1 = z_2$. Es folgt daraus, dass $|B| = 1$ ist.
Es seien also $z_1, z_2 \in B$ beliebig. Weil h surjektiv ist, gibt es $x, y \in A^*$ mit $h(x) = z_1$ und $h(y) = z_2$. Weil h gleichzeitig Homomorphismus und Anti-Homomorphismus ist, gilt:

$$z_1z_2 = h(x)h(y) = h(xy) = h(y)h(x) = z_2z_1.$$

Und weil z_1z_2 und z_2z_1 gleiche Wörter sind, sind insbesondere deren erste Zeichen gleich, also: $z_1 = z_2$.

Aufgabe 5.3 (1 + 1.5 + 1.5 + 2 = 6 Punkte)
Es sei $b \in \mathbb{N}_+$, $b \geq 2$. Zudem sei die Abbildung $f\colon Z_b^* \to \mathbb{N}_0$ wie folgt induktiv definiert:

$$f(\varepsilon) = 0 \qquad \forall w \in Z_b^*\ \forall x \in Z_b : f(wx) = f(w) + \mathrm{num}_b(x)$$

a) Es sei $b = 16$. Rechnen Sie $f(\texttt{3A73})$ schrittweise aus. Bei jedem Rechnungsschritt dürfen Sie dabei die Definition von f höchstens einmal benutzen.

Es sei nun die Funktion $g\colon Z_b^* \to Z_b^*$ für jedes $w \in Z_b^*$ wie folgt gegeben: $g(w) = \operatorname{Repr}_b(f(w))$.

b) Sei $b = 3$ und $w = \texttt{2020}$. Geben Sie $g^i(w)$ und $f(g^i(w))$ für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ an.
Hinweis. Dabei steht g^i für die i-fache Komposition von g mit sich selber. Das heißt, für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ ist $g^0 = \mathrm{I}_{Z_b^*}$ und $g^{i+1} = g^i \circ g$.

c) Es sei $b \in \mathbb{N}_+$, $b \geq 2$, wieder beliebig. Ein $w \in Z_b^*$ heißt *Fixpunkt* von g, falls $g(w) = w$ ist.
Geben Sie alle Fixpunkte von g an.

d) Es sei $x \in \mathbb{N}_0$, $x < b^2$, und $w = \operatorname{Repr}_b(x)$. Zeigen Sie, dass $f(w) \leq x$ ist.
Tipp 1. Sie dürfen ohne Beweis die Tatsache benutzen, dass (wie in Aufgabe 5.4 unten gezeigt wird) die Darstellung von x zur Basis b höchstens 2 Ziffern lang (d.h., $|w| \leq 2$) ist.
Tipp 2. Wenn $x < b$ ist, dann dürfte Ihre Antwort aus c) behilflich sein.

Lösung 5.3

a)
$$\begin{aligned} f(\texttt{3A73}) &= f(\texttt{3A7}) + 3 \\ &= f(\texttt{3A}) + 10 \\ &= f(\texttt{3}) + 20 \\ &= f(\varepsilon) + 23 \\ &= 23 \end{aligned}$$

b) Es gilt:
- $g^0(w) = \texttt{2020}$ und $f(g^0(w)) = 4$
- $g^1(w) = \texttt{11}$ und $f(g^1(w)) = 2$
- für jedes $i \in \mathbb{N}_+$, $i \geq 2$: $g^i(w) = \texttt{2}$ und $f(g^i(w)) = 2$

c) Die Menge aller Fixpunkte von g ist genau Z_b.

d) Es sei $w = \operatorname{Repr}_b(x)$. Wir unterscheiden zwischen den zwei folgenden Fällen:

$x < b$: Dann ist $w = \operatorname{Repr}_b(x) = \operatorname{repr}_b(x) \in Z_b$,
also $f(w) = f(\varepsilon) + \operatorname{num}_b(\operatorname{repr}_b(x)) = x$

$x \geq b$: Es seien $y = x \ \mathbf{div}\ b$ und $z = x \ \mathbf{mod}\ b$. Es gilt also $x = yb + z$.
Natürlich ist $z < b$ und wegen $x < b^2$ ist auch $y < b$.
Damit ist $w = \operatorname{repr}_b(y)\operatorname{repr}_b(z)$.
Wegen $b \geq 2$ gilt damit: $f(w) = y + z \leq yb + z = x$.

Aufgabe 5.4 (5 Punkte)

Es sei $b \in \mathbb{N}_+$ und $b \geq 2$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ Folgendes gilt:

$$|\operatorname{Repr}_b(n)| \leq 1 + \log_b n.$$

Tipp 1. Versuchen Sie nicht, die Behauptung so wie sie da steht direkt mit Induktion über n zu zeigen. Wandeln Sie sie stattdessen in eine äquivalente Aussage um, die sich zwar noch durch Induktion zeigen lässt, aber mit der Definition von Repr_b und den Eigenschaften des Logarithmus kompatibler ist.

Tipp 2. Für alle $x, y \in \mathbb{N}_+$ gilt $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$. Zudem ist $\log_b$ injektiv und monoton steigend.

Lösung 5.4
Wir zeigen folgende Behauptung durch Induktion über k:

$$\forall k \in \mathbb{N}_+ \; \forall n \in \mathbb{N}_+, n < b^k : |\mathrm{Repr}_b(n)| \leq 1 + \log_b n.$$

Das ist zu der ursprünglichen Aussage äquivalent, weil es zu jedem $n \in \mathbb{N}_+$ ein $k \in \mathbb{N}_+$ gibt, sodass $n < b^k$ ist.

IA: Für $k = 1$ und jedes $n \in \mathbb{N}_+$ mit $n < b$ ist $\mathrm{Repr}_b(n) = \mathrm{repr}_b(n) \in Z_b$. Das Wort $\mathrm{Repr}_b(n)$ hat also Länge genau gleich $1 = 1 + \log_b 1 \leq 1 + \log_b n$.

IS: Es sei $k \in \mathbb{N}_+$ beliebig und es gelte die

IV: Für jedes $n' \in \mathbb{N}_+$ mit $n' < b^k$ gilt: $|\mathrm{Repr}_b(n')| \leq 1 + \log_b n'$.

Zu zeigen ist die **IB:** Für jedes $n' \in \mathbb{N}_+$ mit $n' < b^{k+1}$ gilt: $|\mathrm{Repr}_b(n')| \leq 1 + \log_b n'$.

Sei dazu $n \in \mathbb{N}_+$ mit $n < b^{k+1}$ beliebig.

Wenn $n < b^k$ ist, dann ist die Behauptung bereits durch die IV gegeben.

Sei daher nun $n \geq b^k$ sowie $y = n \;\textbf{div}\; b$ und $z = n \;\textbf{mod}\; b$, das heißt, $n = by + z$.

Dann ist $1 \leq y < b^k$ und folglich:

$$\begin{aligned}
|\mathrm{Repr}_b(n)| &= |\mathrm{Repr}_b(y)\mathrm{repr}_b(z)| \\
&= |\mathrm{Repr}_b(y)| + 1 \\
&\overset{\text{IV}}{\leq} 1 + \log_b(y) + 1 \\
&= 1 + \log_b(y) + \log_b(b) \\
&= 1 + \log_b(by) \\
&\leq 1 + \log_b(by + z) \\
&= 1 + \log_b n.
\end{aligned}$$