Lösungen zur Klausur Höhere Mathematik I+II (Informatik)

Herbst 2017

HM I:

Aufgabe 1

Die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1 := 1, \qquad a_{n+1} := \frac{1}{2}a_n + 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

a) Beweisen Sie, dass $a_n = \frac{2^n-1}{2^{n-1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Berechnen Sie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2-a_n)$.

Lösung zur Aufgabe 1:

a) Wir zeigen die Behauptung durch vollständige Induktion.

(I.A.) Es gilt $a_1 = 1 = \frac{2-1}{1} = \frac{2^1-1}{2^{1-1}}$.

(I.V.) Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $a_n = \frac{2^n-1}{2^{n-1}}$.

(I.S.) $n \curvearrowright n+1$: Mit Hilfe der Rekursionsgleichung erhalten wir

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \overset{(I.V.)}{=} \frac{1}{2}\frac{2^n-1}{2^{n-1}} + 1 = \frac{2^n-1}{2^n} + 1 = \frac{2^n-1+2^n}{2^n} = \frac{2^{n+1}-1}{2^n}.$$

b) Hierbei handelt es sich um eine geometrische Reihe und daher berechnet sich der Reihenwert wie folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2-a_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(2-\frac{2^n-1}{2^{n-1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(2-\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Aufgabe 2

Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes für alle $y > x > 0$ die Ungleichung

$$ye^{y^2} - xe^{x^2} \leq (y-x)(1+2y^2)e^{y^2}.$$

Lösung zur Aufgabe 2:

Seien $y > x > 0$. Wir definieren $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch $f(t) := te^{t^2}$ für alle $t \in (0,\infty)$. Die Funktion f ist differenzierbar mit

$$f'(t) = e^{t^2} + 2t^2e^{t^2} = (1+2t^2)e^{t^2} \quad (t \in (0,\infty)).$$

Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in (x,y)$ mit

$$ye^{y^2} - xe^{x^2} = f(y) - f(x) = (y-x)f'(\xi) = (y-x)(1+2\xi^2)e^{\xi^2}.$$

Da die Funktionen $t \mapsto 1+2t^2$ und $t \mapsto e^{t^2}$ auf $(0,\infty)$ monoton wachsend und positiv sind, wächst f' auf $(0,\infty)$ monoton. Daher gilt

$$(1+2\xi^2)e^{\xi^2} \leq (1+2y^2)e^{y^2}.$$

Wegen $y - x > 0$ ergibt sich

$$ye^{y^2} - xe^{x^2} = (y-x)(1+2\xi^2)e^{\xi^2} \leq (y-x)(1+2y^2)e^{y^2}.$$

Aufgabe 3

a) Untersuchen Sie die Funktionenfolge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ definiert durch

$$f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) := e^{-nx^2},$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls die punktweise Grenzfunktion.

b) Bestimmen Sie alle Punkte $x \in \mathbb{R}$, in denen die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

differenzierbar ist, und bestimmen Sie gegenenfalls die Ableitung.

Lösung zur Aufgabe 3:

a) Wir definieren die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

Im Folgenden zeigen wir, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ auf $\mathbb{R}$ punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen f konvergiert:
Es gilt $f_n(0) = e^0 = 1 \to 1 = f(0)$ für $n \to \infty$ und für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gilt $0 < e^{-x^2} < 1$ und damit folgt $f_n(x) = e^{-nx^2} = (e^{-x^2})^n \to 0 = f(x)$ für $n \to \infty$. Das heißt $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert auf $\mathbb{R}$ punktweise gegen f. Da f_n für alle $n \in \mathbb{N}$ stetig ist, aber f unstetig, ist diese Konvergenz nach Satz 8.3. nicht gleichmäßig.

b) In allen Punkten $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ist die Funktion f als Verkettung differenzierbarer Funktionen differenzierbar und die Ableitung ist aufgrund der Produkt- und Kettenregel gegeben durch

$$f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Nun betrachten wir den Punkt $x = 0$. Für $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$\left|\frac{f(h) - f(0)}{h}\right| = \left|\frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h}\right| = \left|h \sin\left(\frac{1}{h}\right)\right| \leq |h| \to 0 \quad (h \to 0),$$

da $|\sin(y)| \leq 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Somit ist f an der Stelle $x = 0$ differenzierbar und die Ableitung ist gegeben durch

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0.$$

Aufgabe 4

Schreiben Sie die gesuchten Größen in die dafür vorgesehenen Kästen (im Falle der Nichtexistenz der gesuchten Größe schreiben Sie "existiert nicht"). Rechenwege und Begründungen werden weder verlangt, noch bewertet.

a) Die Menge der Häufungswerte der Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, definiert durch

$a_n := (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} + \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \quad (n \in \mathbb{N})$, ist $\boxed{}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} = \boxed{}$

c) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2} x \, dx = \boxed{}$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x) e^{\cos(x)} \, dx = \boxed{}$

e) Die Funktion $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x) := x^{\frac{1}{x}} \quad (x > 0)$. Berechnen Sie für

$x > 0$ die Ableitung $f'(x) = \boxed{}$

f) Der Konvergenzradius der Reihe $\sum\limits_{n=25}^{\infty} \frac{2}{2^n + 3^n} x^n$ ist $\boxed{}$

Lösung zur Aufgabe 4:

2

a) Es gilt

$$\begin{aligned}
a_1 &= (-1)^0 + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 0 = 1, \\
a_2 &= (-1)^1 + \cos(\pi) = -1 - 1 = -2, \\
a_3 &= (-1)^3 + \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 + 0 = -1, \\
a_4 &= (-1)^6 + \cos(2\pi) = 1 + 1 = 2.
\end{aligned}$$

Außerdem gilt aufgrund der 2π-Periodizität des Cosinus

$$a_{4k+l} = (-1)^{\frac{l(l-1)}{2}} + \cos\left(2\pi + \frac{\pi l}{2}\right) = (-1)^{\frac{l(l-1)}{2}} + \cos\left(\frac{\pi l}{2}\right) = a_l$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und $l \in \{0, 1, 2, 3\}$. Folglich ist die Menge der Häufungswerte gegeben durch $H(a_n) = \{-2, -1, 1, 2\}$.

b) Mit Hilfe der Potenzreihendarstellung des Cosinus erhalten wir für $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} &= \frac{\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right) - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} = \frac{\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}}{x^4} = \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k-4}}{(2k)!} \\
&= \frac{1}{24} + \sum_{k=3}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k-4}}{(2k)!} \to \frac{1}{24} \quad (x \to 0).
\end{aligned}$$

c) Wir berechnen das uneigentliche Integral direkt:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} x \, dx = \lim_{r \to \infty} \int_0^r e^{-x^2} x \, dx = \lim_{r \to \infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2}\right]_0^r = \lim_{r \to \infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

d) Es gilt nach dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung

$$\int_0^{\pi} \sin(x) e^{\cos(x)} \, dx = \left[-e^{\cos(x)}\right]_0^{\pi} = -e^{-1} + e = e - \frac{1}{e}.$$

e) Für alle $x > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\exp\left(\frac{1}{x}\log(x)\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{x}\log(x)\right)\left(-\frac{1}{x^2}\log(x) + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\right) \\
&= x^{\frac{1}{x}-2}(-\log(x) + 1).
\end{aligned}$$

f) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
&\sqrt[n]{\frac{2}{2^n + 3^n}} \leq \sqrt[n]{\frac{2}{3^n}} = \frac{\sqrt[n]{2}}{3} \to \frac{1}{3} \quad (n \to \infty) \quad \text{sowie} \\
&\sqrt[n]{\frac{2}{2^n + 3^n}} \geq \sqrt[n]{\frac{2}{3^n + 3^n}} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Nach dem Sandwich-Theorem gilt daher $\rho := \limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{2}{2^n + 3^n}} = \sqrt[n]{\frac{2}{2^n + 3^n}} = \frac{1}{3}$ und für den Konvergenzradius r folgt $r = \frac{1}{\rho} = 3$.

Aufgabe 5

Es sei $I := [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall mit $a < b$ und $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Verbinden Sie die folgenden Aussagen mit logischen Beziehungen, indem Sie **eines** der folgenden Symbole $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$, bzw. $\Uparrow$, $\Downarrow$, $\Updownarrow$ oder den Text "keine Beziehung" in die Kästchen schreiben. Jedes Kästchen, welches die richtige Implikation enthält, wird mit 0,5 Punkten bewertet. Fehlt eine Implikation, gibt es für dieses Kästchen keinen Punkt.

f ist integrierbar.	[ ]	f ist monoton.	[ ]	f ist stetig.
[ ]		[ ]		[ ]
f ist differenzierbar.	[ ]	f ist beschränkt.		f ist gleichmäßig stetig.

Lösung zur Aufgabe 5:

f ist integrierbar.	$\Leftarrow$	f ist monoton.	Keine Beziehung	f ist stetig.
$\Uparrow$		$\Downarrow$		$\Updownarrow$
f ist differenzierbar.	$\Rightarrow$	f ist beschränkt.		f ist gleichmäßig stetig.

HM II:

Aufgabe 1

Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x, y) = \cos(y)e^y x^2 - 1 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Zeigen Sie: Es existieren Radien $\delta, \eta > 0$ so, dass für alle $x \in U_\delta(1)$ eine eindeutige Lösung $g(x) \in U_\eta(0)$ von $f(x, g(x)) = 0$ mit $g(1) = 0$ existiert. Berechnen Sie für die dadurch implizit definierte Funktion $g'(1)$.

3

Lösung zur Aufgabe 1:

Zunächst einmal ist der Punkt $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$ eine Nullstelle von f, denn

$$f(1, 0) = \cos(0)e^0 1^2 - 1 = 0.$$

Als Verkettung differenzierbarer Funktionen ist f differenzierbar und die partiellen Ableitungen sind gegeben durch

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xe^y \cos(y),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 e^y [\cos(y) - \sin(y)] \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Damit folgt $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 1^2 e^0[\cos(0) - \sin(0)] = 1 \neq 0$. Mithin sind die Voraussetzungen des Satzes über implizit definierte Funktioen erfüllt. Laut diesem Satz existieren Radien $\delta, \eta > 0$ so, dass für alle $x \in U_\delta(1)$ eine eindeutige Lösung $g(x) \in U_\eta(0)$ von $f(x, g(x)) = 0$ mit $g(1) = 0$ existiert. Desweiteren liefert der Satz, dass die Funktion $g \in C^1(U_\delta(1), \mathbb{R})$ ist und die Ableitung g' ist gegeben durch

$$g'(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) \qquad (x \in U_\delta(1)).$$

Insbesondere gilt

$$g'(1) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = -1 \cdot 2 = -2.$$

Aufgabe 2

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) = (1 + x^2)e^{y(x)}, \quad y(0) = 0.$$

b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'''(x) - 5y''(x) + 6y'(x) = 0.$$

Lösung zur Aufgabe 2:

a) Wir lösen das Anfangswertproblem mit Hilfe der Methode Trennung der Variablen.

$$y' = (1 + x^2)e^y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (1 + x^2)e^y \Rightarrow e^{-y}dy = (1 + x^2)dx$$
$$\Rightarrow \int e^{-y}dy = \int (1 + x^2)dx + C \Rightarrow -e^{-y} = x + \frac{1}{3}x^3 + C.$$

Die Lösungen der Differentialgleichung sind also gegeben durch $y(x) = -\log\left(-x - \frac{1}{3}x^3 - C\right)$ mit Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Aus der Anfangsbedingung erhalten wir $0 = y(0) = -\log(-C)$ und somit muss $C = -1$ gelten. Folglich ist die Lösung des AWPs gegeben durch

$$y(x) = -\log\left(-x - \frac{1}{3}x^3 + 1\right) \quad (x \in (-\infty, \alpha)),$$

wobei $\alpha \in (0, \infty)$ die Nullstelle der Funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := -x - \frac{1}{3}x^3 + 1$, ist.

b) Das charakteristische Polynom für die gegebene lineare, homogene Differentialgleichung ist gegeben durch

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = \lambda(\lambda-2)(\lambda-3).$$

Die Nullstellen dieses Polynoms sind 0, 2 und 3. Somit ist $e^0 = 1$, e^2, e^3 ein Fundamentalsystem für die obige Differentialgleichung und die allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$y(x) = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}$$

mit $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3

a) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Formulieren Sie die Aussage des Mittelwertsatzes für die Funktion f.

b) Verbinden Sie die folgenden Aussagen mit logischen Beziehungen, indem Sie **eines** der folgenden Symbole $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ oder den Text "keine Beziehung" in die Kästchen schreiben. Jedes Kästchen, welches die richtige Implikation enthält, wird mit 0,5 Punkten bewertet. Fehlt eine Implikation, gibt es für dieses Kästchen keinen Punkt.

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in \mathbb{R}^2$.

$f'(x_0) = (0,0)$.		f hat in x_0 ein lokales Extremum.
Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. f ist differenzierbar.		f ist stetig partiell differenzierbar.
Sei $f\colon [0,2]^2 \to \mathbb{R}$ stetig. $f(x,y) \geq 1 \quad ((x,y) \in [0,2]^2)$.		$\int_{[0,2]^2} f(x,y)\,d(x,y) \geq 4$.
Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Es gilt $x \neq 0$ und $y \neq 0$.		Es gilt $\lvert x \cdot y\rvert < \lVert x\rVert \lVert y\rVert$.

Lösung zur Aufgabe 3:

a) Für eine differenzierbare Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Menge lautet die Aussage des Mittelwertsatzes: Seien $a, b \in D$ und $S[a,b] \subseteq D$. Dann existiert ein $\xi \in S[a,b]$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b-a).$$

4

b) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in \mathbb{R}^2$.

$f'(x_0) = (0,0)$.	$\Leftarrow$	f hat in x_0 ein lokales Extremum.
Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. f ist differenzierbar.	$\Leftarrow$	f ist stetig partiell differenzierbar.
Sei $f\colon [0,2]^2 \to \mathbb{R}$ stetig. $f(x,y) \geq 1 \quad ((x,y) \in [0,2]^2)$.	$\Rightarrow$	$\int_{[0,2]^2} f(x,y)\,d(x,y) \geq 4$.
Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Es gilt $x \neq 0$ und $y \neq 0$.	$\Leftarrow$	Es gilt $\lvert x \cdot y\rvert < \lVert x\rVert \lVert y\rVert$.

Aufgabe 4

Schreiben Sie die gesuchten Größen in die dafür vorgesehenen Kästen (im Falle der Nichtexistenz der gesuchten Größe schreiben Sie "existiert nicht"). Rechenwege und Begründungen werden weder verlangt noch bewertet.

a) Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x,y,z) := (e^{xy^2}z^2, \sin(x) + y^2)$. Berechnen Sie für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ die Ableitung

$f'(x,y,z) =$ $\boxed{}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2y^2}}{xy} =$ $\boxed{}$

c) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) := xe^{2y}$, $a := (0,-1) \in \mathbb{R}^2$, dann gilt:

$\frac{\partial f}{\partial a}(2,1) =$ $\boxed{}$

5

d) $\sum_{n=5}^{\infty} 3^n \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} (z+i)^n$ hat den Konvergenzradius $r = \boxed{}$

e) Für $a > 0$ sei $K_a := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le z^2,\ z \in [0,a]\}$.

$|K_a| = \boxed{}$

f) Es sei $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$ die Einheitskreisscheibe in $\mathbb{R}^2$.

$\int_B (x^2+y^2)\, d(x,y) = \boxed{}$

Lösung zur Aufgabe 4:

a) $f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{xy^2}y^2z^2 & e^{xy^2}2xyz^2 & e^{xy^2}2z \\ \cos(x) & 2y & 0 \end{pmatrix}$.

b) Wir definieren die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \frac{\sqrt{x^2y^2}}{xy}$. Nun betrachten wir die beiden Folgen $\left(\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ und $\left(\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$, die beide für $n \to \infty$ gegen $(0,0)$ konvergieren. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq -1 = \lim_{n\to\infty} -1 = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right).$$

Somit existiert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2y^2}}{xy}$ nicht.

c) Die Ableitung von f ist $f'(x,y) = (e^{2y}, 2xe^{2y})$. Daher ist die gesuchte Richtungsableitung gegeben durch

$$\frac{\partial f}{\partial a}(2,1) = f'(2,1)\cdot a = (e^2, 4e^2)\cdot(0,-1) = -4e^2.$$

d) Es gilt $\rho := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \limsup_{n\to\infty} 3\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{3}{e}$ und für den Konvergenzradius r folgt $r = \frac{1}{\rho} = \frac{e}{3}$.

e) Mit Hilfe von Zylinderkoordinaten berechnen wir

$$|K_a| = \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^z r\, dr\, d\varphi\, dz = 2\pi \int_0^a \frac{1}{2}z^2\, dz = \frac{\pi}{3}a^3.$$

f) Wir wenden die Substitutionsregel (Polarkoordinaten) an und erhalten

$$\int_B (x^2+y^2)\, d(x,y) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \cdot r\, d\varphi\, dr = 2\pi \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{2}.$$