Lösungen zur Klausur Höhere Mathematik I+II (Informatik)

Herbst 2018

HM I:

Aufgabe 1

Seien $a \in (-1, 1), b \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Für $n \in \mathbb{N}_0$ definiere

$$x_{n+1} := ax_n + b.$$

Zeigen Sie:

a) Es existiert genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x = ax + b$. Bestimmen Sie dieses.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n - \frac{b}{1-a} = a^n \left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right)$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{b}{1-a}$.

Lösung zur Aufgabe 1:

a) Es gilt für $x \in \mathbb{R}$

$$x = ax + b \iff x(1-a) = b \overset{a \neq 1}{\iff} x = \frac{b}{1-a}.$$

Da dies alles äquivalente Umformungen sind, folgt die Existenz und Eindeutigkeit.

b) Wir zeigen die Behauptung mit Hilfe vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Für den Induktionsanfang $n = 1$ gilt

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{b}{1-a} &= ax_0 + b - \frac{b}{1-a} \\ &= ax_0 + b\frac{1-a-1}{1-a} \\ &= ax_0 - \frac{ab}{1-a} \\ &= a\left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right). \end{aligned}$$

Die Induktionsvoraussetzung lautet: Die Behauptung gelte für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$. Für den Induktionsschritt $n \mapsto n+1$ rechnen wir

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} - \frac{b}{1-a} &= ax_n + b - \frac{b}{1-a} \\
&= ax_n + b\frac{1-a-1}{1-a} \\
&= ax_n - \frac{ab}{1-a} \\
&= a\left(x_n - \frac{b}{1-a}\right) \\
&\overset{\text{IV}}{=} aa^n\left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right) \\
&= a^{n+1}\left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right).
\end{aligned}
$$

c) Nach b) gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\left|x_n - \frac{b}{1-a}\right| = |a|^n \left|x_0 - \frac{b}{1-a}\right| \longrightarrow 0 \cdot \left|x_0 - \frac{b}{1-a}\right|, \qquad (n \longrightarrow \infty)$$

weil $|a| < 1$ und somit $|a|^n \to 0$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 2

a) Sei $x > 0$ beliebig. Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+n} - \sqrt{x}$.

Lösung zur Aufgabe 2:

a) Setze $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(t) = \sqrt{t}$. Nach Vorlesung ist f auf $(0,\infty)$ stetig differenzierbar, also insbesondere für ein festes $x > 0$ stetig auf $[x, x+1]$ und stetig differenzierbar auf $(x, x+1)$. Für alle $t \in (x, x+1)$ gilt

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \begin{cases} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ \geq \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} \end{cases}$$

nach der Monotonie der Wurzel. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in (x, x+1)$ mit

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} - \sqrt{x} &= f(x+1) - f(x) \\ &= f'(\xi)\,(x+1-x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \begin{cases} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ \geq \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} \end{cases}\end{aligned}$$

b) Nach a) gilt

$$\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}_{\substack{x\to\infty \\ \to 0}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\substack{x\to\infty \\ \to 0}}$$

und nach dem Einschließungskriterium folgt $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 0$. Also folgt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+n} - \sqrt{x} &= \lim_{x\to\infty} \sqrt{x+n} - \sqrt{x+n-1} + \sqrt{x+n-1} - \cdots + \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \sqrt{x+j+1} - \sqrt{x+j} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \lim_{x\to\infty} \sqrt{x+j+1} - \sqrt{x+j} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \lim_{y\to\infty} \sqrt{y+1} - \sqrt{y} \\ &= 0,\end{aligned}$$

wobei die Summe und der Grenzwert vertauscht werden durften weil die Summe endlich und unabhängig von x ist.

Aufgabe 3

Für $n \in \mathbb{N}$ definiere $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}$.

a) Entwickeln Sie f_n um 0 in eine Potenzreihe und bestimmen Sie ihren Konvergenzradius.

b) Untersuchen Sie die Funktionenfolge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls die punktweise Grenzfunktion.

Hinweis zu a): Geometrische Reihe.

Lösung zur Aufgabe 3:

a) Für $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ gilt $nx^2 \in (-1,1)$ und mit der geometrischen Reihe folgt

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{1}{1-(-nx^2)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(-nx^2\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k n^k x^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} a_k &= (-1)^{\frac{k}{2}} n^{\frac{k}{2}} && \text{für } k \in \mathbb{N}_0 \text{ gerade und} \\ a_k &= 0 && \text{für } k \in \mathbb{N}_0 \text{ ungerade.} \end{aligned}$$

Es gilt

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup_{k\to\infty} n^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n},$$

d.h. die Potenzreihe für f_n hat Konvergenzradius $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

b) Es gilt $f_n(0) = \frac{1}{1+0} = 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1$ und für alle $x \neq 0$ gilt $f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Setze $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$ Damit folgt $f_n \to f$ punktweise auf $\mathbb{R}$ für $n \longrightarrow \infty$. Weil f_n stetig ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ aber f unstetig, kann nach Vorlesung $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ nicht gleichmäßig gegen f konvergieren.

Aufgabe 4

Schreiben Sie die gesuchten Größen in die dafür vorgesehenen Kästen (im Falle der Nichtexistenz der gesuchten Größe schreiben Sie "existiert nicht"). Rechenwege und Begründungen werden weder verlangt, noch bewertet.

a) Sei $a_n := \sin((2n-1)\frac{\pi}{4})\cos((2n-1)\frac{\pi}{4})$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Menge der Häufungswerte von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ist gegeben durch $\boxed{}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}\right) = \boxed{}$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} =$ $\boxed{}$

d) $\int_0^{\pi} (\sin(x))^2 e^x \, dx =$ $\boxed{}$

e) $\int_1^{\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2} \, dx =$ $\boxed{}$

f) Der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{2^{n!}} x^n$ ist $\boxed{}$

Lösung zur Aufgabe 4:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n = \frac{1}{2}\sin((2n-1)\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}(-1)^{n+1}$. Damit folgt

$$H(a_n) = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}.$$

b) Nach dem Satz von Taylor gilt $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + R(x)$ mit $\frac{R(x)}{x^2} \longrightarrow 0$ für $x \longrightarrow 0$. Damit folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{8} + \frac{R(x)}{x^2} = -\frac{1}{8}.$$

Alternativ: 2 mal l'Hospital.

c) Es gilt $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sin(x)} = +\infty$, $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{\sin(x)} = -\infty$, $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$, also folgt $\lim_{x\to 0+} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = +\infty$, $\lim_{x\to 0-} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = -\infty$. Damit existiert der Grenzwert $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ nicht.

d) Wir rechnen mit zweifacher partieller Integration

$$\begin{aligned}
I &:= \int_0^\pi \sin^2(x)e^x dx \\
&= \left[\sin^2(x)e^x\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2\sin(x)\cos(x)e^x dx \\
&= 0 - [2\sin(x)\cos(x)e^x]_0^\pi + \int_0^\pi 2(\cos^2(x) - \sin^2(x))e^x dx \\
&= -0 + 2\int_0^\pi (1 - 2\sin^2(x))e^x dx \\
&= 2\int_0^\pi e^x dx - 4I
\end{aligned}$$

$$\iff \qquad 5I = 2(e^\pi - e^0)$$

$$\iff \qquad \int_0^\pi \sin^2(x)e^x dx = I = \frac{2}{5}(e^\pi - 1).$$

e) Mit der Substitution $y = \frac{1}{x}, dy = -\frac{1}{x^2}dx$ folgt

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \cos\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}dx &= \int_1^0 \cos(y)(-1)dy \\
&= \int_0^1 \cos(y)dy \\
&= \sin(1) - \sin(0) \\
&= \sin(1).
\end{aligned}$$

f) Wir verwenden das Quotientenkriterium. Es gilt

$$\begin{aligned}
0 \le \frac{(n+1)!}{2^{(n+1)!}}\frac{2^{n!}}{n!} &= (n+1)\frac{1}{2^{n!(n+1-1)}} \\
&\overset{n!\geq 1}{\leq} \frac{n+1}{2^n} \longrightarrow 0 \text{ für } n \longrightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Damit folgt, dass der Konvergenzradius ∞ ist.

Aufgabe 5

Sei $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine reelle Folge.
Verbinden Sie die folgenden Aussagen mit logischen Beziehungen, indem Sie **eines** der folgenden Symbole $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$, bzw. $\Uparrow$, $\Downarrow$, $\Updownarrow$ oder den Text “keine Beziehung” in die Kästchen schreiben. Jedes Kästchen, welches die richtige Implikation enthält, wird mit $0,5$ Punkten bewertet. Fehlt eine Implikation, gibt es für dieses Kästchen keinen Punkt.

$(a_n)_{n=1}^\infty$ ist beschränkt und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \geq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.		$(a_n)_{n=1}^\infty$ ist konvergent.		$\sum_{n=1}^\infty a_n$ ist konvergent.
$(a_n)_{n=1}^\infty$ hat endlich viele Häufungswerte.		$(a_n)_{n=1}^\infty$ ist beschränkt.		$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n$ ist konvergent.

Lösung zur Aufgabe 5:

$(a_n)_{n=1}^\infty$ ist beschränkt und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \geq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.	$\Leftrightarrow$	$(a_n)_{n=1}^\infty$ ist konvergent.	$\Leftarrow$	$\sum_{n=1}^\infty a_n$ ist konvergent.
$\Downarrow$		$\Downarrow$		k.B.
$(a_n)_{n=1}^\infty$ hat endlich viele Häufungswerte.	keine Beziehung	$(a_n)_{n=1}^\infty$ ist beschränkt.		$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n$ ist konvergent.

HM II:

Aufgabe 1

a) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = -x^2 + 2x + y^2$. Zeigen Sie, dass f **kein** lokales Extremum hat.

b) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$f(x,y,z,u) = (xyzu - 1, xy^2z^2u^2 - 1) \quad ((x,y,z,u) \in \mathbb{R}^4).$$

Zeigen Sie: Es existieren Radien $\delta, \eta > 0$ so, dass für alle $(z,u) \in U_\delta\big((1,1)\big)$ eine eindeutige Lösung $g(z,u) \in U_\eta\big((1,1)\big)$ von $f(g(z,u), z, u) = 0$ mit $g(1,1) = (1,1)$ existiert. Berechnen Sie für die dadurch implizit definierte Funktion $g'(1,1)$.

Lösung zur Aufgabe 1:

a) Angenommen f hat ein lokales Extremum in $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, dann gilt $f'(x,y) = 0$, also

$$-2x + 2 = 0 \text{ und } 2y = 0.$$

Die einzige Lösung dieses Gleichungssystems ist dann $(1,0)$. Gibt es ein Extremum, so liegt dieses folglich bei $(1,0)$. Für die Hessematrix an dieser Stelle erhält man:

$$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte liest man entweder direkt ab oder man berechnet sie wie folgt: Die Eigenwerte dieser Matrix erfüllen genau die Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$(-2 - \lambda)(2 - \lambda) = 0$$

und sind folglich durch $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 2$ gegeben. Da ein Eigenwert größer und der andere echt kleiner Null ist, ist die Hessematrix in $(1,0)$ indefinit. Nach Vorlesung liegt somit kein lokales Extremum vor.

b) Zunächst einmal ist der Punkt $(1,1,1,1) \in \mathbb{R}^4$ eine Nullstelle von f. Als Verkettung differenzierbarer Funktionen ist f differenzierbar und die partiellen Ableitungen sind gegeben durch

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(x,y,z,u) = \begin{pmatrix} yzu & xzu \\ y^2z^2u^2 & 2x^2yz^2u^2 \end{pmatrix},$$
$$\frac{\partial f}{\partial(z,u)}(x,y,z,u) = \begin{pmatrix} xyu & xyz \\ 2xy^2zu^2 & 2xy^2z^2u \end{pmatrix} \quad ((x,y,z,u) \in \mathbb{R}^4).$$

Damit folgt

$$\det\left(\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(1,1,1,1)\right) = \det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} = 2-1 = 1 \neq 0$$

Mithin sind die Voraussetzungen des Satzes über implizit definierte Funktioen erfüllt. Laut diesem Satz existieren Radien $\delta,\eta > 0$ so, dass für alle $(z,u) \in U_\delta\big((1,1)\big)$ eine eindeutige Lösung $g(z,u) \in U_\eta\big((1,1)\big)$ von $f(g(z,u),z,u) = 0$ mit $g(1,1) = (1,1)$ existiert. Desweiteren liefert der Satz, dass die Funktion $g \in C^1(U_\delta\big((1,1)\big),\mathbb{R}^2)$ ist und die Ableitung g' ist gegeben durch

$$g'(z,u) = -\left(\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(g(z,u),z,u)\right)^{-1}\frac{\partial f}{\partial(z,u)}(g(z,u),z,u) \qquad ((z,u)\in U_\delta\big((1,1)\big)).$$

Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} g'(1,1) &= -\left(\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(1,1,1,1)\right)^{-1}\frac{\partial f}{\partial(z,u)}(1,1,1,1)\\ &= -\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$(1-x)y(x)^2 = x^2y'(x), \quad y(1) = \tfrac{1}{2}$$

auf einem geeigneten Intervall.

b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$2y''(x) - y'(x) = \sin(x).$$

Lösung zur Aufgabe 2:

a) Wir lösen das Anfangswertproblem mit Hilfe der Methode Trennung der Variablen für $x \neq 0, y \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y^2} = \frac{1-x}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = \frac{1-x}{x^2}dx \Rightarrow \int \frac{1}{y^2}dy = \int \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}dx + C\\ \Rightarrow -\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} - \log(x) + C \Rightarrow y = -\frac{1}{-\frac{1}{x} - \log(x) + C}. \end{aligned}$$

Die Lösungen der Differentialgleichung sind also gegeben durch $y(x) = -\frac{1}{-\frac{1}{x}-\log(x)+C}$ mit Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Aus der Anfangsbedingung erhalten wir $\frac{1}{2} = -\frac{1}{-1+C}$ und somit muss $C = -1$ gelten. Folglich ist die Lösung des AWPs gegeben durch

$$\begin{aligned} y(x) &= -\frac{1}{-\frac{1}{x} - \log(x) - 1} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{x} + \log(x) + 1} \qquad (x \in (0, \infty)). \end{aligned}$$

b) Das charakteristische Polynom für die zugehörige lineare, homogene Differentialgleichung ist gegeben durch

$$p(\lambda) = 2\lambda^2 - \lambda = \lambda(2\lambda - 1).$$

Die Nullstellen dieses Polynoms sind 0 und $\frac{1}{2}$. Somit ist $\{e^0 = 1,\ e^{\frac{1}{2}x}\}$ ein Fundamentalsystem für die obige Differentialgleichung und die allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{\frac{1}{2}x}$$

mit C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$. Eine partikuläre Lösung $y_p(x)$ der inhomogenen Gleichung erhält man durch den Ansatz $y_p(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Beachte, dass 1 keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist. Eingesetzt in die Differentialgleichung erhält man

$$(a - 2b)\sin(x) - (2a + b)\cos(x) = \sin(x).$$

Koeffizientenvergleich liefert dann das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a - 2b &= 1 \\ 2a + b &= 0. \end{aligned}$$

Einzige Lösung ist $a = \frac{1}{5}$ und $b = -\frac{2}{5}$. Eine partikuläre Lösung ist dann gegeben durch

$$y_p(x) = \frac{1}{5}\cos(x) - \frac{2}{5}\sin(x).$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist dann die Summe der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung. Damit erhält man

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{5}\cos(x) - \frac{2}{5}\sin(x), \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

als allgemeine Lösung der Gleichung.

Name: Matrikelnummer: Punkte:

Aufgabe 3

Verbinden Sie die folgenden Aussagen mit logischen Beziehungen, indem Sie **eines** der folgenden Symbole $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ oder den Text "keine Beziehung" in die Kästchen schreiben. Jedes Kästchen, welches die richtige Implikation enthält, wird mit $0,5$ Punkten bewertet. Fehlt eine Implikation, gibt es für dieses Kästchen keinen Punkt.

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf D.

$f'(x) = 0 \quad (x \in D)$.		f ist auf D konstant.

Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleere Mengen.

A ist offen.		$A - B$ ist offen.

Es sei $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ stetig.

$f(x,y) \geq 0 \quad ((x,y) \in [0,1]^2)$.		$\int_{[0,1]^2} f(x,y)d(x,y) \geq 0$.

Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar.

$\int_{A \cup B} 1dx = \int_A 1dx + \int_B 1dx$.		$A \cap B = \emptyset$.

Es sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

$H_f(x_0)$ ist positiv definit.		f hat in x_0 ein lokales Minimum.

Es sei $\alpha \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und es gelte $y'(x) = \alpha(x)y(x) \quad (x \in \mathbb{R})$.

$\exists x_0 \in \mathbb{R} : y(x_0) = 0$.		$y(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lösung zur Aufgabe 3:

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf D.		
$f'(x) = 0 \quad (x \in D)$.	$\Leftarrow$	f ist auf D konstant.
Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleere Mengen.		
A ist offen.	$\Rightarrow$	$A - B$ ist offen.
Es sei $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ stetig.		
$f(x,y) \geq 0 \quad ((x,y) \in [0,1]^2)$.	$\Rightarrow$	$\int_{[0,1]^2} f(x,y)d(x,y) \geq 0$.
Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar.		
$\int_{A\cup B} 1dx = \int_A 1dx + \int_B 1dx$.	$\Leftarrow$	$A \cap B = \emptyset$.
Es sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.		
$H_f(x_0)$ ist positiv definit.	k.B.	f hat in x_0 ein lokales Minimum.
Es sei $\alpha \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und es gelte $y'(x) = \alpha(x)y(x) \quad (x \in \mathbb{R})$.		
$\exists x_0 \in \mathbb{R} : y(x_0) = 0$.	$\Leftrightarrow$	$y(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Aufgabe 4

Schreiben Sie die gesuchten Größen in die dafür vorgesehenen Kästen (im Falle der Nichtexistenz der gesuchten Größe schreiben Sie "existiert nicht"). Rechenwege und Begründungen werden weder verlangt noch bewertet.

a) Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x,y,z) := (e^{xy}z, \sin(z) + x + y)$. Berechnen Sie für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ die Ableitung

$f'(x,y,z) = \boxed{}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x)y^2}{x^3+y^3} = \boxed{}$

c) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) := x^4y^4$, $a := \frac{1}{\sqrt{10}}(-3,1) \in \mathbb{R}^2$, dann gilt:

$\frac{\partial f}{\partial a}(2,1) = \boxed{}$

d) $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \left(\frac{3n+i}{n+2in}\right)^n = \boxed{}$

e) Es sei $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 \geq y \geq 2x^2 - 4, x \geq 0\}$.

$\int_M 1 \, d(x,y) = \boxed{}$

f) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} t^3, & -1 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ und $\hat{f}$ bezeichne ihre Fouriertransformierte.

Dann gilt

$$CH\text{-}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)e^{ist}ds = \begin{cases} \boxed{}, & t < -1 \\ \boxed{}, & t = -1 \\ \boxed{}, & -1 < t < 2 \\ \boxed{}, & t = 2 \\ \boxed{}, & t > 2. \end{cases}$$

Lösung zur Aufgabe 4:

a) $f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{xy}yz & e^{xy}xz & e^{xy} \\ 1 & 1 & \cos(z) \end{pmatrix}$.

b) Es gilt $\frac{\sin(x)\cdot y^2}{(x^3+y^3)} = \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{xy^2}{(x^3+y^3)}$. Da $\frac{\sin(x)}{x}$ für $x \to 0$ konvergiert und der Grenzwert nicht Null ist, existiert obiger Grenzwert genau dann, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{(x^3+y^3)}$ existiert. Nach Wahl von Folgen der Form $(x_n, x_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(0, x_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ sieht man, dass dieser Grenzwert nicht existiert, da der eine Grenzwert $\frac{1}{2}$ und der andere 0 ist.

c) Die Ableitung von f ist $f'(x,y) = (4x^3y^4, 4x^4y^3)$. Daher ist die gesuchte Richtungsableitung gegeben durch

$$\frac{\partial f}{\partial a}(2,1) = f'(2,1)\cdot a = (32,64)\cdot(-3,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{32}{\sqrt{10}}.$$

d) Es gilt

$$\left|\frac{3n+i}{n+2in}\right|^n = \left|\frac{3+\frac{i}{n}}{1+2i}\right|^n \geq \left|\frac{3}{3}\right|^n = 1,$$

womit keine Nullfolge vorliegt und deswegen die Reihe nicht konvergiert.

e) Wir rechnen mit dem Normalbereich mit $f(x) = 2x^2 - 4, g(x) = x^2$. Die Grenzen folgen mit

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 4 \leq x^2 \\ \iff & x^2 - 4 \leq 0 \\ \iff & x^2 \leq 4. \end{aligned}$$

Mit $x \geq 0$ folgt $x \in [0,2]$ sowie mit Cavalieri

$$\int_0^2 \int_{2x^2-4}^{x^2} 1 dy dx = \int_0^2 \left(x^2 - 2x^2 + 4\right) dx = \frac{16}{3}.$$

f) Es gilt

$$CH\text{-}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)e^{ist} ds = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ -\frac{1}{2}, & t = -1 \\ t^3, & -1 < t < 2 \\ 4, & t = 2 \\ 0, & t > 2. \end{cases}$$