Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Klausur - Lösungen

Aufgabe 1:

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y'(x) = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} y(x)\,,\ y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Berechnen Sie ein Fundamentalsystem der Gleichung $y^{(8)}(x) - 2y^{(4)}(x) + y(x) = 0$.

Lösungen:

a) Die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ sind die Lösungen λ der quadratischen Gleichung $(-3-\lambda)(-1-\lambda)+1 = (\lambda+2)^2 = 0$. Folglich ist $\lambda = -2$ ein doppelter Eigenwert. Weiter gilt

$$ker(A+2Id) = ker\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$$

Ein dazu linear unabhängiger Vektor ist $(1,1)^T$ und es gilt

$$(A+2Id)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist $w_2(x) := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} x\right) e^{-2x}$ eine Lösung der Gleichung. Es gilt

$$w_2(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist w_2 die gesuchte Lösung des AWPs.

b) Das charakteristische Polynom der Gleichung ist gegeben durch

$$\lambda^8 - 2\lambda^4 + 1 = (\lambda^4-1)^2 = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2(\lambda-i)^2(\lambda+i)^2.$$

Daraus erhält man das Fundamentalsystem

$$\{e^x, xe^x, e^{-x}, xe^{-x}, \sin(x), \cos(x), x\sin(x), x\cos(x)\}.$$

Aufgabe 2:

a) Zeigen Sie, dass ein $\delta > 0$, sowie eine Funktion $g : (\frac{\pi}{2}-\delta, \frac{\pi}{2}+\delta) \to \mathbb{R}$ existiert, sodass $g(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ und $x = g(x) - 5\cos(g(x))$ $(x \in (\frac{\pi}{2}-\delta, \frac{\pi}{2}+\delta))$. Berechnen Sie $g'(\frac{\pi}{2})$.

b) Es sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t) := \begin{cases} 1, & (t \in [0,2]) \\ -2, & (t \in (2,3]) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Fouriertransformierte von f.

Lösungen:

a) Definiere $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = x - y + 5\cos(y)$. Dann gilt $F(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = -1 - 5\sin(\frac{\pi}{2}) = -6 \neq 0$. Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen existiert ein $\delta > 0$ und eine Funktion g mit den geforderten Eigenschaften. Ferner gilt:

$$g'(\tfrac{\pi}{2}) = -\left(\tfrac{\partial F}{\partial y}(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})\right)^{-1} \cdot \tfrac{\partial F}{\partial x}(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) = \tfrac{1}{6}$$

b)

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-its} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^2 e^{-its}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_2^3 (-2)e^{-its}\,dt.$$

Im Fall $s = 0$ erhält man $\hat{f}(0) = 0$. Andernfalls gilt weiter:

$$\begin{aligned}\hat{f}(s) &= -\frac{1}{2\pi i s}\left([e^{-its}]_0^2 + (-2)[e^{-its}]_2^3\right) \\ &= -\frac{1}{2\pi i s}\left(3e^{-2is} - 2e^{-3is} - 1\right)\end{aligned}$$

Aufgabe 3:

a) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig mit $|f(x,y)| \leq \frac{1}{1+x^2+y^2}$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ und $f(0,0) > 0$. Zeigen Sie, dass f ein globales Maximum besitzt.

b) Verbinden Sie die folgenden Aussagen mit logischen Beziehungen, indem Sie eines der folgenden Symbole $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ oder den Text "keine Beziehung" in die Kästchen schreiben. Jedes Kästchen, welches die richtige Implikation enthält, wird mit $+0,5$ Punkten bewertet. Fehlt eine Implikation, gibt es für dieses Kästchen keinen Punkt.

Es sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar.		
f hat ein globales Maximum in $x_0 \in \mathbb{R}^n$.	keine Beziehung	$f'(x_0) = 0$ und $H_f(x_0)$ ist negativ definit.
Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. grad $f(x_0)$ existiert.	$\Leftarrow$	f ist differenzierbar in $x_0 \in D$.
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. f ist stetig in $(0,0)$.	$\Leftrightarrow$	Für jede Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ aus $\mathbb{R}^2$ mit $x_n \to (0,0)$ $(n \to \infty)$ gilt: $\lvert f(x_n) - f(0,0)\rvert \to 0$ $(n \to \infty)$.
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. f ist stetig in $(0,0)$.	keine Beziehung	f ist partiell differenzierbar in $(0,0)$.

Lösung:

a) Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 + y^2 \geq \frac{2}{f(0,0)}$ gilt: $|f(x,y)| \leq \frac{f(0,0)}{2}$. Auf der kompakten Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq \frac{2}{f(0,0)}\}$ nimmt f nach dem Satz von Heine sein Maximum in einem Punkt (x_0, y_0) an. Da $(0,0)$ in dieser Menge liegt, ist das Maximum notwendigerweise größer als $f(0,0)$. Daher ist (x_0, y_0) eine globale Maximalstelle.

b)
- Falls f in x_0 ein Maximum hat, muss die Hessematrix an der Stelle nicht notwendigerweise negativ definit sein. Ist die rechte Seite erfüllt, liegt ein Maximum vor, welches nicht global sein muss.
- Ist f differenzierbar, so existiert jede Richtungsableitung und damit der Gradient. Die Umkehrung ist falsch. f muss bei Existenz aller Richtungsableitungen nicht einmal stetig sein.
- Dies ist Definition.
- Aus Stetigkeit folgt keine Existenz von Richtungsableitungen und umgekehrt. (vgl Übung).

Aufgabe 4: Schreiben Sie die gesuchten Größen in die dafür vorgesehenen Kästen (im Falle der Nichtexistenz der gesuchten Größe schreiben Sie "existiert nicht"). Rechenwege und Begründungen werden weder verlangt noch bewertet.

a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \max\{0, 1 - |x|\}$. $\lim\limits_{s\to\infty} f(\frac{1}{2} - \hat{f}(s)) = \frac{1}{2}$

b) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{xy}$, $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 & 1+xy \\ xy+1 & x^2 \end{pmatrix} e^{xy}$

c) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$ $((x,y) \neq (0,0))$, $f(0,0) := 0$, $a := (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$.
$\frac{\partial f}{\partial a}(0,0) = \frac{27}{125}$

d) Die Lösung des Anfangswertproblems $y'(x) = e^{x+y(x)}$, $y(0) = 0$ ist

$$y(x) = -\log(2 - e^x) \quad (x \in (-\infty, \log(2)))$$

e) Es sei $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 4, |x| > |y|\}$ und $f : M \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2+y^2$.

$$\int_M f(x,y)\, d(x,y) = \frac{15}{4}\pi$$

f) Es sei $B := \{(x,y,z) \in [-1,1]^3 : x^2 + y^2 \le 1 - z^2\}$.

$$|B| = \frac{4}{3}\pi$$

Erläuterungen:

a) f ist stetig und nach dem Riemann-Lebesgue-Lemma gilt $\lim\limits_{s\to\infty} \hat{f}(s) = 0$. Somit erhält man $\lim\limits_{s\to\infty} f(\frac{1}{2} - \hat{f}(s)) = \lim\limits_{s\to\infty} f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ye^{xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{xy}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y^2 e^{xy}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^2 e^{xy}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = (1+xy)e^{xy}$

c) $\frac{\partial f}{\partial a} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t^3(\frac{3}{5})^3}{t\,t^2((\frac{3}{5})^2 + (-\frac{4}{5})^2)} = (\frac{3}{5})^3$

d) Mit Trennung der Variablen erhält man:

$$y'(x) = e^{x+y(x)} \Leftrightarrow e^{-y(x)} y'(x) = e^x.$$

Integrieren liefert:

$$-e^{-y(x)} = e^x + C \Leftrightarrow y(x) = -\log(-e^x - C).$$

Einsetzen der Anfangsbedingung liefert $C = -2$.

e) Die Funktion ist radialsymmetrisch und wird über zwei Sektoren integriert, die zusammen einen Halbkreisring bilden, somit gilt $\int_M (x^2+y^2)\, d(x,y) = \int_0^\pi \int_1^2 r^2 r\, dr\, d\phi = \frac{\pi}{4}(2^4 - 1^4) = \frac{15}{4}\pi$.

f) B ist die Einheitskugel in $\mathbb{R}^3$, folglich gilt $|B| = \frac{4}{3}\pi$.

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Klausur - Lösungen

Aufgabe 1: Es sei $a_0 \in (\sqrt{2}, 2)$ und die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definiert durch

$$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Lösung: Beh: $a_n \in (0,2)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.
IA: Die Behauptung gilt nach Voraussetzung für $n = 0$.
IV: Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.
IS: Es gilt

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2+2} = 2,$$

sowie:

$$a_{n+1} > \sqrt{2} > 0.$$

Beh: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ist monoton steigend, also $a_{n+1} - a_n > 0$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.
IA: Die Behauptung gilt für $n = 0$, denn

$$a_1 - a_0 = \sqrt{a_0 + 2} - a_0 > 0$$

wegen der Monotonie der Wurzel.
IV: Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.
IS: Es gilt

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} + 2} - \sqrt{a_n + 2} = \frac{a_{n+1} - a_n}{\sqrt{a_{n+1} + 2} + \sqrt{a_n + 2}} > 0$$

nach Induktionsvoraussetzung.
Nach dem Monotoniekriterium konvergiert die Folge. Für den Grenzwert a gilt dann:

$$a = \sqrt{a+2} \;\Leftrightarrow\; a^2 - a - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; a \in \{-1, 2\}.$$

Da $a_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$ folgt $a = 2$.

Aufgabe 2: Schreiben Sie die gesuchten Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästen. Es wird jeweils nur das Ergebnis im Kasten bewertet. Rechenwege und Begründungen werden nicht verlangt und nicht bewertet. Jede richtige Antwort wird mit $+0{,}5$ Punkten bewertet.

a) i) Die Folge $((1 + \frac{1}{n^3})^{(n^\alpha)})_{n=1}^{\infty}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert genau dann, wenn $\alpha \in (-\infty, 3]$ gilt.

ii) $\int_0^1 \cos(x) e^x \, dx = \frac{1}{2}((\cos(1) + \sin(1))e - 1)$

b) Bestimmen Sie die Teilmengen von $\mathbb{R}$, auf der die jeweilige Reihe konvergiert:

i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-4}{n^3 + 5n}(x+1)^n \text{ konvergiert } \Leftrightarrow x \in [-2, 0].$$

ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}(x^2 - 1)^n \text{ konvergiert } \Leftrightarrow x \in (-2, 2).$$

c) i) Es sei $f : [0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^{x^2} \log(\cos(t)) \, dt$. Dann ist

$$f'(x) = 2x \log(\cos(x^2)).$$

ii) Es sei $g : (0,1) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \log(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}})$. Berechnen Sie:

$$g'(\tfrac{1}{2}) = -\frac{4}{3}$$

Erläuterungen:

a) i) Für $\alpha = 3$ gilt $(1 + \frac{1}{n^3})^{n^3} \to e$ $(n \to \infty)$. Für $\alpha > 3$ erhält man mit der Bernoulli'schen Ungleichung

$$(1 + \tfrac{1}{n^3})^{n^\alpha} \geq 1 + \frac{1}{n^3} n^\alpha = 1 + n^{\alpha - 3} \to \infty \quad (n \to \infty).$$

Nach der Vorlesung gilt außerdem $(1 + \frac{1}{n^3})^{n^3} \leq 3$ und somit erhält man für $\alpha < 3$:

$$1 \leq (1 + \tfrac{1}{n^3})^{n^\alpha} = (1 + \tfrac{1}{n^3})^{n^3 n^{\alpha-3}} = \left((1 + \tfrac{1}{n^3})^{n^3}\right)^{n^{\alpha-3}} \leq 3^{n^{\alpha-3}} \to 3^0 = 1 \quad (n \to \infty).$$

Insgesamt konvergiert die Folge also für $\alpha \in (-\infty, 3]$.

ii) Mit zweimaliger partieller Integration erhält man:

$$\int_0^1 \cos(x) e^x \, dx = [\sin(x) e^x]_0^1 + [\cos(x) e^x]_0^1 - \int_0^1 \cos(x) e^x \, dx.$$

Umstellen liefert das Gewünschte.

b) i) Definiere $a_n := \frac{n-4}{n^3+5n}$. Dann gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n-3)(n^3+5n)}{(n^3 + 3n^2 + 8n + 6)(n-4)} \to 1 \qquad (n \to \infty).$$

Damit ist der Konvergenzradius der Potenzreihe 1 und die Reihe konvergiert für $x \in (-2,0)$. Für $x \in \{-2,0\}$ kann man abschätzen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-4}{n^3+5n}|x+1|^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3}|x+1|^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Folglich konvergiert die Reihe für $x \in \{-2,0\}$ nach dem Majorantenkriterium.

ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}(x^2-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2-1}{3}\right)^n.$$

ist eine geometrische Reihe, die genau dann konvergiert, wenn $\frac{x^2-1}{3} < 1$ gilt, also $x \in (-2,2)$ gilt.

c) i) Der Integrand ist stetig, hat folglich eine Stammfunktion, die mit F bezeichnet ist, also gilt $f(x) = F(x^2)$. Nach Kettenregel erhält man:

$$f'(x) = 2x\,F(x^2) = 2x\,\log(\cos(x^2)).$$

ii) Es gilt $g(x) = \frac{1}{2}(\log(1-x) - \log(1+x))$, Daher: $g'(x) = \frac{1}{2}(-\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x})$, sodass an der Stelle $\frac{1}{2}$ gilt

$$g'(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{1-\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{1+\frac{1}{2}}) = -\frac{4}{3}.$$

Aufgabe 3: Es sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine beschränkte Folge mit $a_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$.

Verbinden Sie die folgenden Aussagen mit logischen Beziehungen, indem Sie **eines** der folgenden Symbole $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$, bzw. $\Uparrow$, $\Downarrow$, $\Updownarrow$ oder den Text "keine Beziehung" in die Kästchen schreiben. Jedes Kästchen, welches die richtige Implikation enthält, wird mit $+0{,}5$ Punkten bewertet. Fehlt eine Implikation, gibt es für dieses Kästchen keinen Punkt.

$$\begin{array}{ccccc}
\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n) + \limsup\limits_{n\to\infty}(-a_n) = 0 & \Leftrightarrow_{a)} & (a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ konvergiert} & \Leftrightarrow_{b)} & \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n) \text{ konvergiert} \\
 & & \Uparrow_{c)} & & \Uparrow_{d)} \\
(\frac{1}{a_n})_{n=1}^{\infty} \text{ konvergiert} & \text{keine Bez.}_{e)} & (a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ ist monoton} & \Leftrightarrow_{f)} & (\frac{1}{a_n})_{n=1}^{\infty} \text{ ist monoton}
\end{array}$$

a) Es gilt $\limsup\limits_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$. Somit ist die linke Seite 0, wenn größter und kleinster HW übereinstimmen, also die Folge konvergiert. Andererseits gilt $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ im Falle der Konvergenz.

b) Es gilt $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n) = \lim\limits_{N\to\infty} a_{N+1} - a_1$. Die Äquivalenz folgt aus den Grenzwertsätzen.

c) Monotoniekriterium

d) Folgt aus f), c), b)

e) Falls (a_n) monotone Nullfolge ist, so ist $(\frac{1}{a_n})_{n=1}^{\infty}$ unbeschränkt und somit nicht konvergent. Andererseits folgt aus der Konvergenz einer Folge keine Monotonie, sodass auch die umgekehrte Richtung im Hinblick auf f) keine Implikation ist.

f) Ist $(\frac{1}{a_n})_{n=1}^{\infty}$ monoton steigend/fallend, so ist $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ monoton fallend/steigend und umgekehrt, da die Inversion selbstinvers ist.

Aufgabe 4: Es sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ definiert durch $f_n(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n}}$.

a) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert und bestimmen Sie diese.

b) Zeigen Sie, dass f_n Lipschitz-stetig ist $(n \in \mathbb{N})$.

c) Zeigen Sie, dass f nicht Lipschitz-stetig, aber gleichmäßige stetig ist.

Lösung:

a) Setze $f(x) = \sqrt{x}$, dann gilt

$$|f_n(x) - f(x)| = |\sqrt{x+\tfrac{1}{n}} + \sqrt{x}| = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}} \leq \tfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \qquad (n\to\infty)$$

unabhängig von x. Somit ist $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ gleichmäßig konvergent gegen f.

b) Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in [0,1]$:

$$|f_n(x) - f_n(y)| = |\sqrt{x+\tfrac{1}{n}} - \sqrt{y+\tfrac{1}{n}}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{y+\frac{1}{n}}} \leq \frac{\sqrt{n}}{2}|x-y|.$$

c) Betrachtet man die Folgen $(x_k)_{n=1}^{\infty}$ und $(y_k)_{n=1}^{\infty}$ mit $x_k = \frac{1}{k^2}$, $y_k = \frac{1}{4k^2}$, so erhält man

$$\frac{f(x_k)-f(y_k)}{x_k - y_k} = \frac{\sqrt{\frac{1}{k^2}} - \sqrt{\frac{1}{4k^2}}}{\frac{1}{k^2} - \frac{1}{4k^2}} = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{3}{4k^2}} = \frac{4k}{3} \to \infty \qquad (k\to\infty)$$

Insofern ist f nicht Lipschitz-stetig. Wohl aber ist f nach dem Satz von Heine als stetige Funktion auf einem kompakten Interval gleichmäßig stetig.

Aufgabe 5:

a) Beweisen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = (t^2+2t)e^{-\frac{t^2}{2}}$ beschränkt ist.

b) ~~Beweisen Sie, dass das Integral $\int_1^{\infty}(t^2+2t)e^{-t^2}\,dt$ konvergiert.~~

c) Zeigen Sie die Ungleichung: $\int_1^{\infty}(t^2+2t)e^{-t^2}\,dt \geq \frac{3}{2}e^{-1}$.

Lösung:

a) Wir zeigen, dass $|f|$ beschränkt ist. Es gilt

$$|f(\sqrt{2})| = (2+2\sqrt{2})e^{-\frac{2}{2}} \geq \frac{2}{e} > 0.$$

Mit der l'Hospitalschen Regel gilt:

$$\lim_{t\to\pm\infty} |f(t)| = \left| \lim_{t\to\pm\infty} \frac{t^2+2t}{e^{\frac{t^2}{2}}} \right| = \left| \lim_{t\to\pm\infty} \frac{2t+2}{t\, e^{\frac{t^2}{2}}} \right| = \left| \lim_{t\to\pm\infty} \left(2+\frac{2}{t}\right) e^{-\frac{t^2}{2}} \right| = 0.$$

Damit existiert ein $R > \sqrt{2}$ sodass für alle $|t| \geq R$ gilt $|f(t)| \leq \frac{1}{e}$. Da $|f|$ stetig und $[-R, R]$ kompakt ist, existiert $M := \max_{t\in[-R,R]} |f(t)|$. Nach Definition gilt also $|f(t)| \leq M$ für alle $t \in [-R, R]$ und $M \geq |f(\sqrt{2})| \geq \frac{2}{e} > \frac{1}{e}$, d.h. $|f|$ ist auch auf $\mathbb{R} \setminus [-R, R]$ durch M beschränkt. Insgesamt ist $|f|$ also beschränkt durch M.

b) Definiere $\sup(|f|(\mathbb{R})) = M$. Dann kann der Integrand abgeschätzt werden durch

$$|(t^2+2t)e^{-t^2}| \leq Me^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Die obere Schranke ist integrierbar, somit konvergiert das Integral nach dem Majorantenkriterium absolut.

c) Für $t \geq 1$ gilt $t^2 \geq t$. Damit folgt:

$$\int_1^\infty (t^2+2t)e^{-t^2}\, dt \geq \int_1^\infty 3te^{-t^2}\, dt \geq \frac{3}{2}[-e^{-t^2}]_1^\infty = \frac{3}{2}e^{-1}.$$