Lösungen zur Klausur Höhere Mathematik I+II (Informatik)

Frühjahr 2018

Aufgabe 1

Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Aussage

$$\log((n+1)!) \geq n-1.$$

Lösung zur Aufgabe 1:

Wir zeigen die Behauptung durch vollständige Induktion.

(I.A.) Für $n = 1$ gilt $\log((n+1)!) = \log(2!) = \log(2) \geq \log(1) = 0 = n-1$, da der Logarithmus monoton wachsend ist.

(I.V.) Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $\log((n+1)!) \geq n-1$.

(I.S.) $n \curvearrowright n+1$:

$$\begin{aligned}\log(((n+1)+1)!) &= \log((n+1)!(n+2)) = \log((n+1)!) + \log(n+2) \overset{\text{I.V.}}{\geq} n-1+\log(n+2)\\ &\geq n-1+\underbrace{\log(e)}_{=1} = (n+1)-1,\end{aligned}$$

denn $n+2 \geq 3 > e$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und der Logarithmus ist monoton wachsend.

Aufgabe 2

Sei $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ definiert durch $f(x) = (x^2+x)\sqrt{x}$. Zeigen Sie, dass f bijektiv ist und berechnen Sie $(f^{-1})'(2)$.

Lösung zur Aufgabe 2:

Als Verkettung differenzierbarer Funktionen ist f auf $(0,\infty)$ differenzierbar und mit der Produkt- und Kettelregel gilt

$$f'(x) = (2x+1)\sqrt{x} + (x^2+x)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}\left(\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}\right) > 0 \quad (x \in (0,\infty)).$$

Mithin gilt $f' > 0$ auf $(0,\infty)$ und somit ist f auf $(0,\infty)$ streng monoton wachsend nach Satz 9.10. Da f auf $[0,\infty)$ stetig ist, ist f demnach auf $[0,\infty)$ injektiv. Mit $f(0) = 0$ und $f(x) \to \infty$ $(x \to \infty)$ ergibt sich mit dem Zwischenwertsatz $f([0,\infty)) = [0,\infty)$, d.h. f ist surjektiv. Insgesamt ist f bijektiv.

Wegen $f(1) = 2$ liefert der Satz 9.3. über die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion

$$\left(f^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}.$$

Aufgabe 3

a) Untersuchen Sie die Funktionenfolge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ definiert durch

$$f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \cos\left(\frac{x}{n}\right),$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls die punktweise Grenzfunktion.

b) Es sei $0{,}121212\ldots$ die 3-adische Entwicklung einer Zahl $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $m, n \in \mathbb{N}$ mit $a = \frac{m}{n}$.

Lösung zur Aufgabe 3:

a) Wir definieren die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Im Folgenden zeigen wir, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ auf $\mathbb{R}$ punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen f konvergiert:
Für festes $x \in \mathbb{R}$ gilt $\frac{x}{n} \to 0$ für $n \to \infty$. Aufgrund der Stetigkeit des Cosinus folgt daher $f_n(x) = \cos\left(\frac{x}{n}\right) \to \cos(0) = 1 = f(x)$ für $n \to \infty$. Das heißt $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert auf $\mathbb{R}$ punktweise gegen f. Die Konvergenz ist jedoch nicht gleichmäßig, da

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \geq \left|f_n\left(\frac{\pi n}{2}\right) - f\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right| = \Big|\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} - 1\Big| = 1,$$

d.h. insbesondere konvergiert $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$ für $n \to \infty$ nicht gegen 0.

b) Nach Voraussetzung ist $0{,}121212\ldots$ die 3-adische Entwicklung von $a \in \mathbb{R}$. Das bedeutet

$$a = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z_l}{3^l}$$

mit $z_0 = 0$, $z_{2k-1} = 1$, $z_{2k} = 2$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Mithin ergibt sich

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2k-1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2k}} = (3+2)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2k}} = 5\Big(-1 + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{9^k}}_{=\frac{9}{8}}\Big) = \frac{5}{8}.$$

Dabei wurde der Reihenwert der geometrischen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{9^k}$ mit Hilfe der bekannten Formel berechnet. Folglich können wir $m := 5$ und $n := 8$ wählen um wie gefordert $a = \frac{m}{n}$ zu erhalten.

Aufgabe 4

Schreiben Sie die gesuchten Größen in die dafür vorgesehenen Kästen (im Falle der Nichtexistenz der gesuchten Größe schreiben Sie "existiert nicht"). Rechenwege und Begründungen werden weder verlangt, noch bewertet.

a) Die Menge der Häufungswerte der Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, definiert durch

$a_n := e^{(-1)^n n - n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$ $(n \in \mathbb{N})$, ist

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^5}{\sinh(x) - x - \frac{x^3}{6}} =$

c) $\displaystyle\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\, dx =$

d) $\displaystyle\int_0^1 x^3 e^{x^2}\, dx =$

e) Die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x) := x^{(x^2)}$. Berechnen Sie für $x > 0$

die Ableitung $f'(x) =$

f) Der Konvergenzradius der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}(x-1)^n$ ist

Lösung zur Aufgabe 4:

a) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{2k} = e^{(-1)^{2k}2k - 2k} \sin\left(\frac{2k\pi}{2}\right) = e^0 \sin(k\pi) = 0 \text{ und}$$

$$a_{2k+1} = e^{(-1)^{2k+1}(2k+1)-(2k+1)} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = \underbrace{e^{-4k-2}}_{\to 0} \underbrace{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)}_{\text{beschränkt}} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Folglich konvergiert die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ gegen 0 und die Menge der Häufungswerte ist gegeben durch $H(a_n) = \{0\}$.

b) Mit Hilfe der Potenzreihendarstellung des Sinus Hyberbolicus erhalten wir für $x \neq 0$:

$$\frac{x^5}{\sinh(x) - x - \frac{x^3}{6}} = \frac{x^5}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} - x - \frac{x^3}{6}} = \frac{x^5}{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}} = \frac{1}{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{2k-4}}{(2k+1)!}}$$
$$= \frac{1}{\frac{1}{5!} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{x^{2k-4}}{(2k+1)!}} \to \frac{1}{\frac{1}{5!}} = 5! = 120 \quad (x \to 0).$$

c) Wir berechnen das uneigentliche Integral direkt:

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \lim_{r \to 0+} \int_r^1 x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \lim_{r \to 0+} \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_r^1 = \lim_{r \to 0+} \left(2 - 2r^{\frac{1}{2}}\right) = 2.$$

d) Wir integrieren partiell und verwenden anschließend den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\int_0^1 x^3 e^{x^2}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 \cdot e^{x^2} 2x\, dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot e^{x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 x \cdot e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}e - \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

e) Für alle $x > 0$ gilt

$$f'(x) = \left(\exp\left(x^2 \log(x)\right)\right)' = \exp\left(x^2 \log(x)\right)\left(2x \log(x) + \frac{x^2}{x}\right)$$
$$= x^{(x^2)}\left(2x\log(x) + x\right) = x^{(x^2+1)}\left(2\log(x) + 1\right).$$

f) Sei $a_n := \frac{n^n}{n!} > 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1} \to e^{-1} \quad (n \to \infty).$$

Daher ist nach Satz 4.2. der Konvergenzradius $r := \lim\limits_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = e^{-1}$.

Aufgabe 5

Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine reelle Folge.

Verbinden Sie die folgenden Aussagen mit logischen Beziehungen, indem Sie **eines** der folgenden Symbole $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$, bzw. $\Uparrow$, $\Downarrow$, $\Updownarrow$ oder den Text "keine Beziehung" in die Kästchen schreiben. Jedes Kästchen, welches die richtige Implikation enthält, wird mit 0.5 Punkten bewertet. Fehlt eine Implikation, gibt es für dieses Kästchen keinen Punkt.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergiert.	$\boxed{}$	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut.	$\boxed{}$	$a_n \to 0$ für $n \to \infty$.
$\boxed{}$		$\boxed{}$		$\boxed{}$
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.	$\boxed{}$	$\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} \le 1$		$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ist beschränkt.

Lösung zur Aufgabe 5:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergiert.	$\Leftarrow$	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut.	$\Rightarrow$	$a_n \to 0$ für $n \to \infty$.
Keine Beziehung		$\Downarrow$		$\Downarrow$
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.	$\Rightarrow$	$\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} \le 1$		$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ist beschränkt.

HM II:

Aufgabe 1

Untersuchen Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x^2 - 2x + y^3 - 3y \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

auf lokale und globale Extrema.

Lösung zur Aufgabe 1:

Die Funktion f ist weder nach oben noch nach unten beschränkt, da $f(0,y) \to +\infty$ für $y \to +\infty$ und $f(0,y) \to -\infty$ für $y \to -\infty$. Folglich können keine globalen Extrema auftreten. Für die lokalen Extrema gilt

$$\operatorname{grad} f(x,y) \overset{!}{=} (0,0) \Leftrightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x - 2 = 0 \text{ und } \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3y^2 - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ und } y^2 = 1.$$

Folglich sind $(1,1)$ und $(1,-1)$ die einzigen stationären Punkte. Für die Hessematrix gilt

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix} \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Insbesondere hat die Hessematrix

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

zwei positive Eigenwerte 2 und 6 und ist demnach positiv definit. Nach Satz 18.10. hat f in $(1,1)$ ein lokales Minimum. Andererseits hat die Hessematrix

$$H_f(1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

einen positiven und einen negativen Eigenwert und ist demzufolge indefinit. Daher hat f nach Satz 18.10 in $(1,-1)$ kein lokales Extremum. Also hat f wegen Satz 18.10 nur ein lokales Extremum und zwar ein lokales Minimum in $(1,1)$.

Aufgabe 2

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) = 2x\cos(x^2)y(x) + xe^{\sin(x^2)}, \quad y(0) = 1.$$

Lösung zur Aufgabe 2:

Die zum gegebenen Anfangswertproblem gehörende Differentialgleichung ist eine lineare, inhomogene Differentialgleichung. Daher bestimmen wir zunächst die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y'(x) = 2x\cos(x^2)y(x).$$

Eine Stammfunktion von $x \mapsto 2x\cos(x^2)$ ist gegeben durch $x \mapsto \sin(x^2)$. Folglich ist die allgemeine homogene Lösung gegeben durch $y_h(x) = ce^{\sin(x^2)}$ $(c \in \mathbb{R})$. Als Nächstes bestimmen wir eine partikuläre Lösung y_p mit Hilfe der Methode *Variation der Konstanten*. Wir bestimmen also eine Funktion $c(x)$ so, dass $y_p(x) := c(x)e^{\sin(x^2)}$ die inhomogene Differenzialgleichung

$$y'(x) = 2x\cos(x^2)y(x) + xe^{\sin(x^2)}$$

löst. Somit ergibt sich

$$y_p'(x) = 2x\cos(x^2)y_p(x) + c'(x)e^{\sin(x^2)}.$$

Folglich soll $c'(x)e^{\sin(x^2)} = xe^{\sin(x^2)}$ gelten. Dies führt zu $c'(x) = x$, mithin kann $c(x) := \frac{1}{2}x^2$ gewählt werden. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist demnach gegeben durch

$$y(x) = y_p(x) + ce^{\sin(x^2)} = \left(\frac{1}{2}x^2 + c\right)e^{\sin(x^2)}$$

mit $c \in \mathbb{R}$. Schließlich bestimmen wir die Konstante $c \in \mathbb{R}$ so, dass die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ erfüllt ist. Es gilt

$$y(0) = (0 + c)e^0 = c \stackrel{!}{=} 1.$$

Insgesamt ist $y(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right)e^{\sin(x^2)}$ $(x \in \mathbb{R})$ die Lösung der gegebenen Anfangswertaufgabe.

Aufgabe 3

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge.

Verbinden Sie die folgenden Aussagen mit logischen Beziehungen, indem Sie **eines** der folgenden Symbole $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$, bzw. $\Uparrow$, $\Downarrow$, $\Updownarrow$ oder den Text "keine Beziehung" in die Kästchen schreiben. Jedes Kästchen, welches die richtige Implikation enthält, wird mit 0,5 Punkten bewertet. Fehlt eine Implikation, gibt es für dieses Kästchen keinen Punkt.

D ist kompakt.	$\boxed{}$	D ist abgeschlossen.	$\boxed{}$	$D = [0,\infty)^n$
$\boxed{}$				$\boxed{}$
D ist beschränkt.	$\boxed{}$	$D = (0,1)^n$	$\boxed{}$	D ist offen.

Lösung zur Aufgabe 3:

D ist kompakt.	$\boxed{\Rightarrow}$	D ist abgeschlossen.	$\boxed{\Leftarrow}$	$D = [0,\infty)^n$.
$\boxed{\Downarrow}$				keine Beziehung
D ist beschränkt.	$\boxed{\Leftarrow}$	$D = (0,1)^n$.	$\boxed{\Rightarrow}$	D ist offen.

Aufgabe 4

Schreiben Sie die gesuchten Größen in die dafür vorgesehenen Kästen (im Falle der Nichtexistenz der gesuchten Größe schreiben Sie "existiert nicht"). Rechenwege und Begründungen werden weder verlangt noch bewertet.

a) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) := (x+y, xy\cos(y^2), y^3)$. Berechnen Sie für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ die Ableitung

$f'(x,y) =$ $\boxed{}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(2xy)+x^2y}{xy} =$ $\boxed{}$

c) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := xy^2$, $a := \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in \mathbb{R}^2$, dann gilt:

$\frac{\partial f}{\partial a}(1,-1) =$ $\boxed{}$

d) Der Imaginärteil von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{3}\right)^n$ ist $\boxed{}$

e) Für $0 < c < 1$ sei $H_c := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon c \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

$|H_c| =$ $\boxed{}$

f) Es sei $A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 2\}$.

$\int_A z \, d(x,y,z) =$ $\boxed{}$

Lösung zur Aufgabe 4:

a) $f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y\cos(y^2) & x(\cos(y^2) - 2y^2\sin(y^2)) \\ 0 & 3y^2 \end{pmatrix}$.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(2xy)+x^2y}{xy} = 2 \cdot \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(2xy)}{2xy} + \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x = 2 + 0 = 2.$

c) Die Ableitung von f ist $f'(x,y) = (y^2, 2xy)$. Daher ist die gesuchte Richtungsableitung gegeben durch

$$\frac{\partial f}{\partial a}(1,-1) = f'(1,-1) \cdot a = (1,-2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{3}\right)^n = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{3}\right)^n = -1 + \frac{1}{1-\frac{i}{3}} \cdot \frac{1+\frac{i}{3}}{1+\frac{i}{3}} = -1 + \frac{9}{10} + \frac{3}{10}i = -\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i.$$

Somit ist der Imaginärteil der gegebenen Reihe gleich $\frac{3}{10}$.

e) Mit Hilfe von Kugelkoordinaten berechnen wir

$$|H_c| = \int_c^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos(\vartheta) \, d\vartheta \, d\varphi \, dr = 2\pi \cdot \int_c^1 r^2 \, dr \cdot \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\vartheta) \, d\vartheta}_{=2} = \frac{4\pi}{3}(1 - c^3).$$

f) Wir wenden die Substitutionsregel (Zylinderkoordinaten) an und erhalten

$$\int_A z \, d(x,y,z) = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 rz \, dr \, d\varphi \, dz = 2\pi \underbrace{\int_0^2 z dz}_{=2} \underbrace{\int_0^1 r dr}_{=\frac{1}{2}} = 2\pi.$$

Analysis 2 – Frühjahr 2018

Aufgabe 1 Sei $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion und es existiere $a = \lim_{t\to 0} g(t)$. Weiter sei $f(x,y) := xg\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ differenzierbar ist und $f'(0,0) = (a,0)$ gilt.

Lösung. Für $t \neq 0$ gelten

$$\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{tg(|t|)}{t} = g(|t|) \to a \quad \text{für } t \to 0$$

und

$$\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0.$$

Also ist f in $(0,0)$ partiell differenzierbar und es gilt $f_x(0,0) = a$ und $f_y(0,0) = 0$. Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$\begin{aligned} q(x,y) &:= \frac{|f(x,y) - f(0,0) - xf_x(0,0) - yf_y(0,0)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{\big|xg\big(\sqrt{x^2+y^2}\big) - ax\big|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\|(x,y)\|}\big|g\big(\|(x,y)\|\big) - a\big| \\ &\leq \big|g\big(\|(x,y)\|\big) - a\big|. \end{aligned}$$

Somit gilt $0 \leq q(x,y) \leq \big|g\big(\|(x,y)\|\big) - a\big| \to 0$ für $(x,y) \to (0,0)$ wie behauptet. □

Aufgabe 2 Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = 2x^3 + 3\mathrm{e}^{2y} - 6x\mathrm{e}^y.$$

a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f.
b) Ist f nach unten beschränkt?
c) Ist f nach oben beschränkt?

Lösung. a) Die Funktion f ist zweimal stetig differenzierbar und es gilt

$$f'(x,y) = (6x^2 - 6\mathrm{e}^y, 6\mathrm{e}^{2y} - 6x\mathrm{e}^y)$$

sowie

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & -6\mathrm{e}^y \\ -6\mathrm{e}^y & 12\mathrm{e}^{2y} - 6x\mathrm{e}^y \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Es gilt $f'(x,y) = (0,0)$ genau dann wenn $x^2 = \mathrm{e}^y$ und $x = \mathrm{e}^y$ gilt. Also ist notwendigerweise $x^2 = x$ und somit $x = 0$ oder $x = 1$. Da es für $\mathrm{e}^y = 0$ keine Lösung gibt, ist die einzige kritische Stelle bei $(1,0)$. Die obige Rechnung zeigt

$$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\big(H_f(1,0)\big)_{11} = 12 > 0$ und $\det H_f(1,0) = 12\cdot 6 - 6\cdot 6 > 0$, also ist $H_f(1,0)$ positiv definit. Daher liegt in $(1,0)$ ein lokales Minimum vor.
b), c) Es gilt $f(x,0) = 2x^3 + 3 - 6x \to \pm\infty$ für $x \to \pm\infty$. Also ist f weder nach unten noch nach oben beschränkt. □

Aufgabe 3 Sei $K \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt, $K^\circ \neq \emptyset$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(x,y) \neq 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Zeigen Sie, dass es $(x_0, y_0) \in \partial K$ mit $f(x_0, y_0) \neq 0$ gibt.

Lösung. Angenommen es gelte $f(x,y) = 0$ für alle $(x,y) \in \partial K$. Da K kompakt ist, existieren $a, b \in K$ mit

$$f(a) \leq f(x,y) \leq f(b) \qquad \text{für alle } (x,y) \in K. \tag{$*$}$$

Wegen $f'(x,y) \neq 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ hat f keine lokalen Extremstellen und es folgt $a, b \in \partial K$. Nun gilt nach Annahme $f(a) = 0 = f(b)$ und damit folgt mit $(*)$, dass $f(x,y) = 0$ für alle $(x,y) \in K$ gilt. Insbesondere gilt $f'(x,y) = 0$ für alle $(x,y) \in K^\circ$, ein Widerspruch zur Annahme. Also ist die Annahme falsch und es folgt die Behauptung. $\square$

Aufgabe 4 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(1) = 0$ und $f'(1) = 2$.
Zeigen Sie, dass es eine offene Umgebung von $(1,1)$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ mit

$$g(1,1) = 1 \quad \text{und} \quad g(x,y) = x + yf\big(g(x,y)\big) \quad \text{für alle } (x,y) \in U.$$

Berechnen Sie $g'(1,1)$.

Lösung. Definiere $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch $F(x,y,z) = x + yf(z) - z$. Dann ist F stetig differenzierbar und es gilt $F(1,1,1) = 0$ sowie $F_z(x,y,z) = yf'(z) - 1$, also $F_z(1,1,1) = 2 - 1 = 1 \neq 0$. Der Satz über implizit definierte Funktionen liefert nun eine Umgebung U und eine Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ wie behauptet.

Es gilt nun $g(x,y) = x + yf\big(g(x,y)\big)$ für alle $(x,y) \in U$. Es folgt

$$g_x(x,y) = 1 + yf'\big(g(x,y)\big)g_x(x,y)$$

und

$$g_y(x,y) = f\big(g(x,y)\big) + yf'\big(g(x,y)\big)g_y(x,y).$$

Also gilt insbesondere

$$g_x(1,1) = 1 + f'(1)g_x(1,1) = 1 + 2g_x(1,1)$$

und

$$g_y(1,1) = 2g_y(1,1).$$

Aus diesen Gleichungen folgt schließlich $g'(1,1) = (-1, 0)$. $\square$

Aufgabe 5 Für $f \in C[0,1]$ definiere

$$(Tf)(x) := 2 + \sin(x) \int_0^x \sqrt{t} f(t)\, dt, \qquad \text{für alle } x \in [0,1].$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.
a) Für jedes $f \in C[0,1]$ gilt $Tf \in C[0,1]$.
b) Es gibt genau ein $f_0 \in C[0,1]$ mit $Tf_0 = f_0$.

Lösung. a) Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist die Abbildung $x \mapsto \int_0^x \sqrt{t} f(t)\, dt$ für $x \in [0,1]$ eine stetige Funktion. Da Summe und Produkte von stetigen Funktionen wieder stetig sind, gilt $Tf \in C[0,1]$.
b) Seien $f, g \in C[0,1]$ und $x \in [0,1]$. Es gilt

$$\begin{aligned}
|Tf(x) - Tg(x)| &= \left|\sin(x) \int_0^x \sqrt{t}\big(f(t) - g(t)\big)\, dt\right| \\
&\leq |\sin(x)| \int_0^x \sqrt{t}\, |f(t) - g(t)|\, dt \\
&\leq \|f - g\|_\infty \int_0^x \sqrt{t}\, dt \\
&\leq \|f - g\|_\infty \int_0^1 \sqrt{t}\, dt \\
&= \frac{2}{3} \|f - g\|_\infty .
\end{aligned}$$

Bildet man nun das Supremum über $x \in [0,1]$, so sieht man $\|Tf - Tg\|_\infty \leq \frac{2}{3}\|f - g\|_\infty$, d.h., T ist eine Kontraktion. Nach a) ist T zudem eine Selbstabbildung des vollständigen Raumes $C[0,1]$. Die Behauptung folgt somit aus dem Fixpunktsatz von Banach. $\square$

Aufgabe 6 Der Weg $\gamma : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$\gamma(t) = \big(e^t \sin(t), e^t \cos(t)\big).$$

a) Berechnen Sie die Weglänge $L(\gamma)$.
b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_\gamma \frac{x}{x^2 + y^2}\, ds$.

Lösung. Der Weg γ ist stetig differenzierbar und es gilt

$$\gamma'(t) = e^t\big(\cos(t) - \sin(t), \sin(t) + \cos(t)\big)$$

sowie

$$\big\|\gamma'(t)\big\| = e^t\big(\cos(t)^2 - 2\cos(t)\sin(t) + \sin(t)^2 + \sin(t)^2 + 2\sin(t)\cos(t) + \cos(t)^2\big) = \sqrt{2}e^t$$

für alle $t \in [-\pi/2, \pi/2]$.
a) Also gilt

$$L(\gamma) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{2}e^t\, dt = \sqrt{2}\big(e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}\big).$$

b) Ferner gilt

$$\int_\gamma \frac{x}{x^2 + y^2}\, ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^t \cos(t)}{e^{2t}\big(\cos(t)^2 + \sin(t)^2\big)} \sqrt{2}e^t\, dt = \sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t)\, dt = 2\sqrt{2}. \quad \square$$

Aufgabe 7 Sei $y_0 \in \mathbb{R}$ und $y_0 \neq 0$. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = x^2 y(x)^4, \qquad y(0) = y_0$$

und bestimmen Sie das maximale Existenzintervall dieser Lösung.

Lösung. Es ist $y'(x) = g(x)h(y(x))$, $y(0) = y_0$, wobei $g(s) = s^2$, $h(y) = y^4$ und $h(y_0) \neq 0$ ist. Da h stetig differenzierbar und somit lokal Lipschitz stetig ist, existiert nach dem Satz von Picard-Lindelöf eine eindeutige lokale Lösung des Anfangswertproblems. Der Satz über die Trennung der Variablen besagt ebenfalls, dass das Anfangswertproblem eine eindeutige lokale Lösung besitzt und er erlaubt zudem sie zu berechnen. Die Lösung y erfüllt für alle x im maximalen Existenzintervall die Gleichung

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}x}{x^4} = \int_0^x s^2 \,\mathrm{d}s.$$

Man erhält also

$$\frac{1}{y_0^3} - \frac{1}{y(x)^3} = x^3,$$

und somit

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{y_0^3} - x^3}}.$$

Falls $y_0 > 0$, so ist das maximale Existenzintervall $\left(-\infty, \frac{1}{y_0}\right)$ und falls $y_0 < 0$, so ist das maximale Existenzintervall $\left(\frac{1}{y_0}, \infty\right)$. □