Lösungen zur Klausur Höhere Mathematik I+II (Informatik)

Frühjahr 2019

HM I:

Aufgabe 1

Sei $f : (1,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) := \frac{1}{1-x}$. Sei $x_0 \in (1,\infty)$ fest.

a) Beweisen Sie die Beziehung

$$f^{(n)}(x) = n! \cdot (f(x))^{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}, x \in (1,\infty)).$$

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius r der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \cdot (x - x_0)^n.$$

c) Sei $g : (x_0 - r, x_0 + r) \to \mathbb{R}$, $g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \cdot (x - x_0)^n$. Zeigen Sie, dass

$$f(x) = g(x) \qquad (x \in (x_0 - r, x_0 + r))$$

gilt.

Lösung zur Aufgabe 1

a) Die Funktion f ist als Verkettung von C^1-Funktionen selbst eine C^1-Funktion. Wir zeigen

$$f^{(n)}(x) = n! \cdot (f(x))^{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}, x \in (1,\infty))$$

mit Hilfe vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Für den Induktionsanfang $n = 1$ gilt nach den üblichen Ableitungsregeln

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= f'(x) = \left((1-x)^{-1}\right)' \\ &= (-1) \cdot (1-x)^{-2} \cdot (-1) = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad (x \in (1,\infty)). \\ &= 1! \cdot (f(x))^{1+1} \end{aligned}$$

Die Induktionsvoraussetzung lautet: Es gelte für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)} = n! \cdot f^{n+1}.$$

Für den Induktionsschritt $n \mapsto n+1$ bemerken wir zunächst, dass $f^{(n)} = n! \cdot f^{n+1}$ eine C^1-Funktion ist, da dies eine Verkettung von den C^1-Funktionen $x \mapsto f(x)$ und $x \mapsto n! \cdot x^{n+1}$ ist. Für den Induktionsschritt rechnen wir mit den üblichen Ableitungsregeln

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}(x)\right)' \overset{\text{IV}}{=} n! \cdot (n+1) \cdot (f(x))^n \cdot f'(x) \\ &= (n+1)! \cdot (f(x))^n \cdot (f(x))^2 = (n+1)!\,(f(x))^{n+2} \end{aligned} \qquad (x \in (1,\infty)).$$

Wobei hier die im Induktionsanfang gezeigte Beziehung $f' = f^2$ genutzt wurde. Insgesamt gilt also für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass $f \in C^n((1,\infty))$ mit $f^{(n)} = n! \cdot f^{n+1}$, also insbesondere auch $f \in C^\infty((1,\infty))$.

b) Es gilt nach a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \cdot (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} n! \left(\frac{1}{1-x_0}\right)^{n+1} \cdot (x-x_0)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1-x_0} \left(\frac{1}{1-x_0}\right)^n \cdot (x-x_0)^n.$$

Für den Konvergenzradius rechnen wir

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{1-x_0} \cdot \left(\frac{1}{1-x_0}\right)^n\right|} = \limsup_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{x_0-1}}}_{\to 1\,(n\to\infty)} \cdot \left(\frac{1}{x_0-1}\right) = \frac{1}{x_0-1},$$

also hat die Potenzreihe Konvergenzradius $r = x_0 - 1$.

c) Sei $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$. Nach b) gilt

$$g(x) = \frac{1}{1-x_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-x_0}{1-x_0}\right)^n$$

sowie

$$\left|\frac{x-x_0}{1-x_0}\right| = \frac{|x-x_0|}{x_0-1} < \frac{r}{x_0-1} = 1.$$

Da g also eine geometrische Reihe ist, gilt

$$g(x) = \frac{1}{1-x_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x-x_0}{1-x_0}} = \frac{1}{(1-x_0)-(x-x_0)} = \frac{1}{1-x} = f(x).$$

Aufgabe 2

Für $t > 0$ sei $g_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g_t(x) := \frac{\sqrt{t}}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + tx^2}.$$

a) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g_t(x)\, dx$.

b) Konvergiert die Funktionenfolge $\left(g_{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise?

Falls ja:
- Bestimmen Sie die Grenzfunktion.
- Ist die Konvergenz gleichmäßig?

Beweisen Sie Ihre Aussagen.

c) Konvergiert die Funktionenfolge $\left(g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise?

Falls ja:
- Bestimmen Sie die Grenzfunktion.
- Ist die Konvergenz gleichmäßig?

Beweisen Sie Ihre Aussagen.

Lösung zur Aufgabe 2

a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} g_t(x)\,dx &= \frac{\sqrt{t}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+tx^2}\,dx \\
&= \frac{\sqrt{t}}{\pi}\lim_{a,b\to\infty}\int_{-a}^{b}\frac{1}{1+(\sqrt{t}x)^2}\,dx \\
&= \frac{\sqrt{t}}{\pi}\lim_{a,b\to\infty}\left[\arctan(\sqrt{t}x)\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}\right]_{x=-a}^{b} \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(\lim_{b\to\infty}\arctan(\sqrt{t}b) - \lim_{a\to\infty}\arctan(-\sqrt{t}a)\Big) \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})\Big) = 1.
\end{aligned}$$

b) Es gilt

$$|g_{\frac{1}{n}}(x)| = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{n}} \le \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{1+0} \to 0 \text{ für } n\to\infty \qquad (x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}),$$

d.h. $g_{\frac{1}{n}} \to 0$ punktweise für $n\to\infty$. Die Abschätzung $|g_{\frac{1}{n}}(x)| \le \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$ gilt uniform in x (also n ist unabhängig von x). Damit ist die Konvergenz auch gleichmäßig.

c) Wir betrachten die Funktion in $x=0$, also

$$g_n(0) = \frac{\sqrt{n}}{\pi}\cdot\frac{1}{1+n\cdot 0} = \frac{1}{\pi}\cdot\sqrt{n} \to \infty \text{ für } n\to\infty,$$

d.h. g_n hat keinen punktweisen Grenzwert, konvergiert also auch nicht gleichmäßig.

Aufgabe 3

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \arctan(\arctan(x))$.

a) Zeigen Sie, dass gilt

$$\forall x, y \in [1, \infty) : |f(x) - f(y)| \leq \frac{8}{16 + \pi^2} \cdot |x - y|.$$

Hinweis: Mittelwertsatz.

b) Zeigen Sie, dass f streng monoton ist.

c) Sei $f^{-1} : \left(-\arctan(\frac{\pi}{2}), \arctan(\frac{\pi}{2})\right) \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion von f. Berechnen Sie $(f^{-1})'(0)$.

Lösung zur Aufgabe 3

Die Funktion f ist C^1 auf $\mathbb{R}$ als Komposition von C^1-Funktionen mit

$$f'(x) = \frac{1}{1+(\arctan(x))^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

a) Seien $x, y \in [1, \infty)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x \leq y$. Die Funktion f ist stetig auf $[x, y]$ und stetig differenzierbar auf dem offenen Intervall (x, y). Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in (x, y)$ mit

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x-y| &= \frac{1}{1+(\arctan(\xi))^2} \cdot \frac{1}{1+\xi^2} \cdot |x-y| \\
&\overset{\xi \geq 1}{\leq} \frac{1}{1+(\arctan(1))^2} \cdot \frac{1}{1+1^2} \cdot |x-y| \\
&= \frac{1}{1+(\frac{\pi}{4})^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot |x-y| \\
&= \frac{8}{16+\pi^2} \cdot |x-y|,
\end{aligned}$$

denn arctan ist monoton wachsend.

b) Es gilt

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+(\arctan(x))^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \\
&\geq \frac{1}{1+0} \cdot \frac{1}{1+0} = 1 > 0
\end{aligned} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

und damit ist f nach Satz 9.10 streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$.

c) Nach b) ist Satz 9.3 anwendbar und es gilt

$$\begin{aligned}
\left(f^{-1}\right)'(0) &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(0)\right)} \\
&= \frac{1}{f'(0)} = \left(1 + (\arctan(0)^2)\right) \cdot (1+0^2) = 1.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Schreiben Sie die gesuchten Größen in die dafür vorgesehenen Kästen (im Falle der Nichtexistenz der gesuchten Größe schreiben Sie "existiert nicht"). Rechenwege und Begründungen werden weder verlangt, noch bewertet.

a) Sei $z := e^{\frac{\pi}{1+i}}$, dann

$\mathrm{Re}(z) =$
$\mathrm{Im}(z) =$

b) Seien $a, b > 0$. Dann: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} =$

c) Sei $a_1 \in [0, \infty)$, $a_{n+1} := 1 + \frac{a_n^2}{4}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Es gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2 \Leftrightarrow a_1 \in$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(n+k)} \right) =$

e) Es sei $n \in \mathbb{N}$. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\frac{1}{n} \cdot x) - 1}{\cosh(n \cdot x) - 1} =$

f) $\displaystyle\int_2^e \frac{1}{\log(x^x)}\, dx =$

Lösung zur Aufgabe 4

a) Es gilt $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ und somit gilt mit der Definition der komplexen Exponentialfunktion

$$e^{\frac{1}{1+i}\pi} = e^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\pi} = e^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2}) \right) = e^{\frac{\pi}{2}}(0 - i) = -e^{\frac{\pi}{2}} i.$$

Also gilt $\mathrm{Re}(z) = 0$ und $\mathrm{Im}(z) = -e^{\frac{\pi}{2}} i$.

b) Es gilt

$$\begin{aligned}\max\{a,b\} &= \sqrt[n]{(\max\{a,b\})^n + 0^n} \le \sqrt[n]{a^n+b^n}\\ &\le \sqrt[n]{(\max\{a,b\})^n + (\max\{a,b\})^n}\\ &= \sqrt[n]{2}\cdot\max\{a,b\} \to \max\{a,b\} \text{ für } n\to\infty.\end{aligned}$$

Also gilt mit dem Sandwich-Lemma

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = \max\{a,b\}.$$

c) Es gilt

$$a_{n+1} - a_n = 1 + \frac{a_n^2}{4} - a_n = \left(1 - \frac{a_n}{2}\right)^2 \ge 0,$$

d.h. die Folge $(a_n)_n$ ist monoton wachsend (unabhängig von a_1). Für $x \in [0,2]$ gilt $1 + \frac{x^2}{4} \le 1 + \frac{2^2}{4} = 2$. Im Fall $a_1 \in [0,2]$ ist die Folge $(a_n)_n$ durch Induktion also beschränkt. Zusammen mit der Monotonie folgt, dass $(a_n)_n$ konvergiert. Sei $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, dann gilt $1 + \frac{a^2}{4} = a \Leftrightarrow \left(1 - \frac{a}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$. Im Fall $a_1 > 2$ ist auch $a_n > 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$, da $(a_n)_n$ monoton ist. Wir nehmen an, dass $(a_n)_n$ beschränkt ist. Dann konvergiert $(a_n)_n$ gegen 2 (wie oben). Aber es gilt $2 < a_1 \le a_n \to 2$ für $n \to \infty$. Dies ist ein Widerspruch. Also ist $(a_n)_n$ unbeschränkt und damit nicht konvergent. Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2 \Leftrightarrow a_1 \in [0,2].$$

d) Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(n+k)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 4.$$

e) Wir wenden zweifach l'Hospital an

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\frac{1}{n}\cdot x) - 1}{\cosh(n\cdot x) - 1} &= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{n}\sin(\frac{1}{n}\cdot x)}{n\sinh(n\cdot x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{n^2}\cos(\frac{1}{n}\cdot x)}{n^2\cosh(n\cdot x)}\\ &= \frac{-\frac{1}{n^2}\cdot 1}{n^2\cdot 1} = -\frac{1}{n^4}.\end{aligned}$$

f) Wir substituieren $y = \log(x)$, d.h. „$dy = \frac{1}{x}dx$“ und somit gilt

$$\begin{aligned}\int_2^e \frac{1}{\log(x^x)}\,dx &= \int_2^e \frac{1}{\log(x)}\frac{1}{x}\,dx = \int_{\log(2)}^1 \frac{1}{y}\,dy\\ &= [\log(y)]_{y=\log(2)}^1 = \log(1) - \log(\log(2))\\ &= -\log(\log(2))\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Verbinden Sie die folgenden Aussagen mit logischen Beziehungen, indem Sie **eines** der folgenden Symbole $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$, bzw. $\Uparrow$, $\Downarrow$, $\Updownarrow$ oder den Text "keine Beziehung" in die Kästchen schreiben. Jedes Kästchen, welches die richtige Implikation enthält, wird mit 0,5 Punkten bewertet. Fehlt eine Implikation, gibt es für dieses Kästchen keinen Punkt.

Sei $I := [a,b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $f : I \to \mathbb{R}$.

f ist differenzierbar auf I	$\boxed{}$	$f \in C(I)$	$\boxed{}$	f ist gleichmäßig stetig auf I
$\boxed{}$		$\boxed{}$		$\boxed{}$
f ist monoton auf I	$\boxed{}$	$f \in R(I)$		f ist Lipschitz-stetig auf I

Lösung zur Aufgabe 5

f ist differenzierbar auf I	$\boxed{\Rightarrow}$	$f \in C(I)$	$\boxed{\Leftrightarrow}$	f ist gleichmäßig stetig auf I
$\boxed{\text{k.B.}}$		$\boxed{\Downarrow}$		$\boxed{\Uparrow}$
f ist monoton auf I	$\boxed{\Rightarrow}$	$f \in R(I)$		f ist Lipschitz-stetig auf I

HM II:

Aufgabe 1

Es sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = 2x^4 + y^2 + xy - \tfrac{3}{2}x - 3y$$

gegeben. Bestimmen Sie alle Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, in denen die Funktion f ein lokales Maximum oder lokales Minimum besitzt.

Lösung zur Aufgabe 1

Wir berechnen zuerst den Gradienten von f. Es gilt

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(8x^3 + y - \frac{3}{2}, 2y + x - 3\right).$$

Für ein lokales Extremum in $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ muss gelten

$$\left(8x^3 + y - \frac{3}{2}, 2y + x - 3\right) = (0,0).$$

Es gilt $y = \frac{-x+3}{2}$ wegen der Gleichheit der zweiten Komponente und damit

$$8x^3 + \frac{-x+3}{2} - \frac{3}{2} = 8x^3 - \frac{1}{2}x = 0.$$

Eine Nullstelle ist offensichtlich $x_1 = 0$ und für $x \neq 0$ rechnen wir folgende äquivalente Umformungen:

$$\begin{aligned} 8x^2 - \frac{1}{2} &= 0 \\ x^2 &= \frac{1}{16} \\ x_{2,3} &= \pm\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Es folgt $y_2 = \frac{-\frac{1}{4}+3}{2} = \frac{13}{8}, y_3 = \frac{\frac{1}{4}+3}{2} = \frac{11}{8}$ und somit kann nur in $(\frac{1}{4}, \frac{13}{8}), (-\frac{1}{4}, \frac{11}{8})$ und $(0, \frac{3}{2})$ ein lokales Extremum vorliegen. Die Hessematrix ist gegeben durch

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 24x^2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die Hessematrix an den Stellen $(\frac{1}{4}, \frac{13}{8})$ und $(-\frac{1}{4}, \frac{11}{8})$. Wir erhalten

$$H_f(x_{2/3}, y_{2/3}) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

sowie $\det H_f(x_{2/3}, y_{2/3}) = 2$. Da jeweils der erste Eintag von $H_f(x_{2/3}, y_{2/3})$ positiv ist, ist $H_f(x_{2/3}, y_{2/3})$ für beide Kandidaten positiv definit und somit liegt in den Punkten $(\frac{1}{4}, \frac{13}{8}), (-\frac{1}{4}, \frac{11}{8})$ ein lokales Minimum vor. Es gilt $\det H_f(0, \frac{3}{2}) = -1$ und somit ist die Hessematrix an der Stelle $(0, \frac{3}{2})$ indefinit. Somit liegt dort kein lokales Extremum vor.

Aufgabe 2

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$x^2 y(x) y'(x) = e^{\frac{1}{x}}, \quad y(1) = -2$$

auf einem geeigneten Intervall.

b) Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(t) = \begin{cases} 2\sin(t), & -\pi \le t \le \pi, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Hinweis: Nutzen Sie für $\hat{f}(-1)$ und $\hat{f}(1)$ aus, dass $\hat{f}$ auf $\mathbb{R}$ stetig ist.

Lösung zur Aufgabe 2

a) Wir lösen das Anfangswertproblem mit Hilfe der Methode Trennung der Variablen für $x \neq 0, y \neq 0$.

$$\begin{aligned} y(x)y'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \Rightarrow y(x)\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \Rightarrow \left(y(x)dy = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx \right) \\ \Rightarrow \int y(x)dy = \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx + c \\ \Rightarrow \frac{1}{2}y^2(x) = -e^{\frac{1}{x}} + c. \end{aligned}$$

Die Lösungen der Differentialgleichung sind also gegeben durch $y(x) = \pm\sqrt{2c - 2e^{\frac{1}{x}}}$ mit Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Aus der Anfangsbedingung erhalten wir, dass nur $y(x) = -\sqrt{2c - 2e^{\frac{1}{x}}}$ möglich ist und es gilt $-2 = -\sqrt{2c - 2e}$, woraus $c = 2 + e$ folgt. Die Lösung des Anfangswertproblems ist also gegeben durch

$$y(x) = -\sqrt{4 + 2e - 2e^{\frac{1}{x}}} \qquad (x \in [1, \infty)).$$

b) Es gilt für $s \neq \pm 1$

$$
\begin{aligned}
2\pi \hat{f}(s) &= \int_{-\pi}^{\pi} 2\sin(t)e^{-ist}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{i}(e^{it} - e^{-it})e^{-ist}\,dt \\
&= \frac{1}{i}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(1-s)t} - e^{-i(1+s)t}\,dt = \frac{1}{i}\left[\frac{e^{i(1-s)t}}{i(1-s)} - \frac{e^{-i(1+s)t}}{-i(1+s)}\right]_{t=-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{2}{i}\left[\frac{e^{i(1-s)t}}{2i(1-s)} + \frac{e^{-i(1+s)t}}{2i(1+s)}\right]_{t=-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{2}{i}\left(\frac{\sin((1-s)\pi)}{(1-s)} + \frac{\sin(-(1+s)\pi)}{(1+s)}\right) \\
&= \frac{2}{i}\left(\frac{-\sin(-s\pi)}{(1-s)} + \frac{-\sin(-s\pi)}{(1+s)}\right) \\
&= \frac{2}{i}\left(\frac{(1+s)\sin(s\pi) + (1-s)\sin(s\pi)}{1-s^2}\right) \\
&= \frac{4\sin(s\pi)}{i(1-s^2)}.
\end{aligned}
$$

Also ist die Fouriertransformierte auf $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ gegeben durch

$$\hat{f}(s) = \frac{2\sin(s\pi)}{\pi i(1-s^2)}.$$

Wegen der Stetigkeit von $\hat{f}$ und der Verwendung von l'Hospital erhalten wir

$$\hat{f}(-1) = -\frac{2\pi}{i}, \qquad \hat{f}(1) = \frac{2\pi}{i},$$

da

$$
\begin{aligned}
\lim_{s\to\pm 1} \frac{4}{i}\frac{\sin(s\pi)}{1-s^2} &= \frac{4}{i}\lim_{s\to\pm 1}\frac{\cos(s\pi)\pi}{-2s} \\
&= \frac{4}{i}\cdot\left(\pm\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

Verbinden Sie die folgenden Aussagen mit logischen Beziehungen, indem Sie **eines** der folgenden Symbole $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ oder den Text "keine Beziehung" in die Kästchen schreiben. Jedes Kästchen, welches die richtige Implikation enthält, wird mit $0,5$ Punkten bewertet. Fehlt eine Implikation, gibt es für dieses Kästchen keinen Punkt.

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $g : M \to \mathbb{R}$ sowie $x_0 \in M$.

g hat in x_0 ein lokales Maximum		$\exists \delta > 0 \, \forall x \in U_\delta(x_0) \cap M : g(x) \leq g(x_0)$

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig.

$\lim\limits_{\alpha \to \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\, dx = 0$		$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 0$

Es sei $\omega \in \mathbb{C}$ und $z_n := \omega^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

$\lvert\omega\rvert \leq 1$		(z_n) konvergiert

Sei A eine reelle und symmetrische 2×2-Matrix.

A ist positiv definit.		$\det A > 0$.

Sei $\left(a^{(k)}\right) = \left(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}\right)$ eine Folge in $\mathbb{R}^2$.

$\left(a_1^{(k)} + a_2^{(k)}\right)$ ist beschränkt.		$\left(a^{(k)}\right)$ enthält eine konvergente Teilfolge.

Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$.

A ist abgeschlossen.		$A \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \lVert x \rVert \leq 1\}$ ist kompakt.

Lösung zur Aufgabe 3

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $g : M \to \mathbb{R}$ sowie $x_0 \in M$.		
g hat in x_0 ein lokales Maximum	$\Leftrightarrow$	$\exists \delta > 0\ \forall x \in U_\delta(x_0) \cap M : g(x) \leq g(x_0)$
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig.		
$\lim\limits_{\alpha \to \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\, dx = 0$	$\Leftarrow$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 0$
Es sei $\omega \in \mathbb{C}$ und $z_n := \omega^n$ $(n \in \mathbb{N})$.		
$\lvert\omega\rvert \leq 1$	$\Leftarrow$	(z_n) konvergiert
Sei A eine reelle und symmetrische 2×2-Matrix.		
A ist positiv definit.	$\Rightarrow$	$\det A > 0$.
Sei $(a^{(k)}) = (a_1^{(k)}, a_2^{(k)})$ eine Folge in $\mathbb{R}^2$.		
$(a_1^{(k)} + a_2^{(k)})$ ist beschränkt.	k.B.	$(a^{(k)})$ enthält eine konvergente Teilfolge.
Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$.		
A ist abgeschlossen.	$\Rightarrow$	$A \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \lVert x\rVert \leq 1\}$ ist kompakt.

Aufgabe 4

Schreiben Sie die gesuchten Größen in die dafür vorgesehenen Kästen (im Falle der Nichtexistenz der gesuchten Größe schreiben Sie "existiert nicht"). Rechenwege und Begründungen werden weder verlangt noch bewertet.

a) Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x,y,z) := (\cos(x^2z^2), e^z x^4 + y, xy)$. Berechnen Sie für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ die Ableitung

$f'(x,y,z) =$ $\boxed{}$

b) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sin\left((x+3)(1+y)z^2\right)}{z^2} =$ $\boxed{}$

c) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) := \sin(x)e^y$, $a := \frac{1}{\sqrt{17}}(-1,4) \in \mathbb{R}^2$, dann gilt:

$\frac{\partial f}{\partial a}(-\frac{\pi}{2}, 0) =$ $\boxed{}$

d) $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \frac{n}{n^{\frac{3}{2}} + in^2} =$ $\boxed{}$

e) Es sei $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 - 2 \le y \le x\}$. Der Inhalt von B ist

$|B| =$ $\boxed{}$

f) Berechnen Sie das komplexe Integral

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \sin(x) + ie^{ix}\, dx =$ $\boxed{}$

Lösung zur Aufgabe 4

a) $f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2xz^2\sin(x^2z^2) & 0 & -2zx^2\sin(x^2z^2) \\ 4x^3e^z & 1 & e^zx^4 \\ y & x & 0 \end{pmatrix}.$

b) Es gilt $\frac{\sin\left((x+3)(1+y)z^2\right)}{z^2} = \frac{\sin\left((x+3)(1+y)z^2\right)}{z^2(x+3)(1+y)}(x+3)(1+y)$. Da $\frac{\sin(t)}{t}$ für $t \to 0$ konvergiert und der Grenzwert gleich 1 ist, existiert obiger Grenzwert genau dann, wenn der Grenzwert $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}(x+3)(1+y)$ existiert. Dieser ist gleich 3 und somit gilt $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sin\left((x+3)(1+y)z^2\right)}{z^2} = 3$.

c) Die Ableitung von f ist $f'(x,y) = (\cos(c)e^y, \sin(x)e^y)$. Daher ist die gesuchte Richtungsableitung gegeben durch

$$\frac{\partial f}{\partial a}(-\tfrac{\pi}{2},0) = f'(-\tfrac{\pi}{2},0)\cdot a = (0,-1)\cdot(-1,4)\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{4}{\sqrt{17}}.$$

d) Es gilt

$$\frac{n}{n^{\frac{3}{2}}+in^2} = \frac{1}{\sqrt{n}+in}\cdot\frac{\sqrt{n}-in}{\sqrt{n}-in} = \frac{\sqrt{n}}{n+n^2} - i\frac{n}{n+n^2} = \frac{\sqrt{n}}{n+n^2} - i\frac{1}{1+n}.$$

Folgen in $\mathbb{C}$ konvergieren genau dann, wenn der Realteil und der Imaginärteil in $\mathbb{R}$ konvergieren. Selbiges überträgt sich auf komplexe Reihen als Spezialfall komplexer Folgen. Es folgt

$$\sum_{n=5}^{\infty}\frac{n}{n^{\frac{3}{2}}+in^2} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=5}^{N}\frac{\sqrt{n}}{n+n^2} - i\frac{1}{1+n}.$$

Der Imaginärteil dieser Folge konvergiert nicht. Folglich divergiert die Reihe.

e) Die Menge B ist ein Normalbereich, dessen Volumen nach Cavalieri wie folgt berechnet wird

$$\int_{-1}^{2}\int_{x^2-2}^{x} 1\,dydx = \int_0^2 \left(x - x^2 + 2\right)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{x=-1}^{2}$$
$$= -\frac{8}{3} + 2 + 4 - (\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2) = 4.5$$

f) Es gilt

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \sin(x) + ie^{ix}\,dx = \left[-\cos(x) + e^{ix}\right]_{x=\frac{\pi}{2}}^{2\pi} = -1 + e^{2i\pi} + \cos(\tfrac{\pi}{2}) - e^{i\frac{\pi}{2}} = -i,$$

da $e^{2i\pi} = 1$ und $e^{-i\frac{\pi}{2}} = i$.