

1. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2022/23

28. Oktober 2022

Abgabe bis 4. November 2022, 13:00 Uhr

Aufgabe 1:

Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt. Beweisen Sie:

- (a) Die Menge $A \cup B$ ist nach oben beschränkt und es gilt:

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

- (b) Die Menge $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$ ist nach oben beschränkt und es gilt:

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

- (c) Die Menge $-A := \{-a : a \in A\}$ ist nach unten beschränkt und es gilt:

$$\inf(-A) = -\sup A.$$

Aufgabe 2 (K):

- (i) Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$|2x - 4| + x < 5.$$

- (ii) Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen ein Infimum, Supremum, Minimum bzw. Maximum haben, und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Werte:

$$(a) \quad A := \left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}, \quad (b) \quad B := \left\{\frac{x^3}{1+x^2} : x \geq 0\right\}.$$

- (iii) Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n}.$

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n + 1.$

Aufgabe 3:

- (i) Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^n k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2.$

- (ii) Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$|x + 5| \leq 2(4 - x).$$

Aufgabe 4:

Es seien A und B nichtleere und beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit $A \cap B \neq \emptyset$. Zeigen Sie

$$\max\{\inf A, \inf B\} \leq \inf(A \cap B) \quad \text{sowie} \quad \sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}.$$

Geben Sie zudem Beispiele für A und B an, sodass obige Ungleichungen strikt sind.

Informationen

Alle weiteren Informationen bezüglich der Themen **Übungsbetrieb**, **Scheinkriterien**, **Tutorien**, **Prüfung**, **Skript** und **Literaturhinweise** finden Sie auf der ILIAS-Seite der Vorlesung.

https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_1896358&client_id=produktiv

Übungsschein

Jede (K)-Aufgabe wird mit maximal 10 Punkten bewertet. Einen Übungsschein erhält, wer auf den Übungsblättern 1-7 und 8-14 **jeweils** mindestens 35 Punkte (50 % der möglichen Punktzahl) erzielt. Notwendig für den Erhalt des Übungsscheins ist eine Anmeldung im CAS-Portal. Diese ist ab sofort und noch bis zum **19.02.2023** möglich.



Semesterauftakttreffen

Du interessierst dich für die Arbeit der Fachschaft und möchtest dich vielleicht gerne selbst engagieren? Schau einfach vorbei am **3. November um 19:00 Uhr** beim **Semesterauftakttreffen**. Hier zeigen wir dir, wie die Fachschaft organisiert ist, was ihre Aufgaben sind und wie du dich bei uns einbringen kannst.