Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

Lösungsvorschlag zum 1. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2022/23

4. November 2022

Aufgabe 1:
Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt. Beweisen Sie:

(a) Die Menge $A \cup B$ ist nach oben beschränkt und es gilt:

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

(b) Die Menge $A + B := \{a + b \colon a \in A, b \in B\}$ ist nach oben beschränkt und es gilt:

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

(c) Die Menge $-A := \{-a \colon a \in A\}$ ist nach unten beschränkt und es gilt:

$$\inf(-A) = -\sup A.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

(a) *Behauptung:* Die Menge $A \cup B$ ist nach oben beschränkt und es gilt $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

Beweis: Es sei $x \in A \cup B$, d.h. es gilt $x \in A$ oder $x \in B$. Im ersten Fall gilt $x \leq \sup A$, im zweiten $x \leq \sup B$. In beiden Fällen gilt also $x \leq \max\{\sup A, \sup B\}$. Somit ist $A \cup B$ nach oben beschränkt mit $\sup(A \cup B) \leq \max\{\sup A, \sup B\}$.

Es bleibt die umgekehrte Ungleichung zu zeigen. Da $A \subseteq A \cup B$ und $B \subseteq A \cup B$ gelten, erhalten wir $\sup A \leq \sup(A \cup B)$ und $\sup B \leq \sup(A \cup B)$, also auch $\max\{\sup A, \sup B\} \leq \sup(A \cup B)$, was die gewünschte Gleichheit beweist. $\square$

(b) *Behauptung:* Die Menge $A + B := \{a + b \colon a \in A, b \in B\}$ ist nach oben beschränkt und es gilt $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Beweis: Da A und B beschränkt sind, existieren $\sup A, \sup B$, und es gelten $a \leq \sup A$ für alle $a \in A$ sowie $b \leq \sup B$ für alle $b \in B$. Somit erhält man für $a \in A$ und $b \in B$:

$$a + b \leq \sup A + b \leq \sup A + \sup B,$$

d.h. $A + B$ ist nach oben durch $\sup A + \sup B$ beschränkt. Außerdem gilt damit $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$.

Wir zeigen nun, dass $\sup A + \sup B$ auch die kleinste obere Schranke von $A + B$ ist (dann ist die Behauptung gezeigt). Dazu nehmen wir an, dass es eine kleinere obere Schranke c von $A + B$ gäbe, d.h. es würde $c < \sup A + \sup B$ und

$$(\star) \qquad a + b \leq c \quad \text{für alle } a \in A,\ b \in B$$

gelten. Wir definieren nun $\varepsilon := \sup A + \sup B - c > 0$. Zu ε existiert nun nach Definition des Supremums ein $a_0 \in A$ mit $a_0 > \sup A - \frac{\varepsilon}{2}$ und analog ein $b_0 \in B$ mit $b_0 > \sup B - \frac{\varepsilon}{2}$. Insgesamt gilt somit

$$a_0 + b_0 > \sup A + \sup B - 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \sup A + \sup B - \varepsilon = c,$$

ein Widerspruch zu $(\star)$. Also ist $\sup A + \sup B$ die kleinste obere Schranke von $A + B$. $\square$

(c) <u>*Behauptung:*</u> Die Menge $-A := \{-a\colon a \in A\}$ ist nach unten beschränkt und es gilt $\inf(-A) = -\sup A$.

<u>*Beweis:*</u> Sei $b \in -A$ beliebig. Dann ist $b = -a$ für ein $a \in A$. Da A nach oben beschränkt ist, gilt $a \leq \sup A$ und damit $b \geq -\sup A$. Da b beliebig war, ist $-A$ nach unten beschränkt und es gilt $\inf(-A) \geq -\sup A$.

Sei nun $a \in A$ beliebig. Dann ist $-a \in -A$ und somit $-a \geq \inf(-A)$. Multiplizieren mit -1 liefert $a \leq -\inf(-A)$. Da a hier beliebig ist, folgt $\sup A \leq -\inf(-A)$ und damit auch $-\sup A \geq \inf(-A)$.

Insgesamt erhalten wir $\inf(-A) = -\sup A$, was zu zeigen war. $\square$

Aufgabe 2 (K):

(i) Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$|2x-4| + x < 5.$$

(ii) Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen ein Infimum, Supremum, Minimum bzw. Maximum haben, und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Werte:

(a) $A := \left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$, (b) $B := \left\{\frac{x^3}{1+x^2} : x \geq 0\right\}$.

(iii) Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n+1$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(i) <u>*Behauptung:*</u> Es gilt $\{x \in \mathbb{R}\colon |2x-4| + x < 5\} = (-1, 3)$.

<u>*Beweis:*</u> Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gilt $2x - 4 \geq 0 \iff 2x \geq 4 \iff x \geq 2$. Wir unterscheiden also die Fälle:

<u>1. Fall</u>: Sei $x \geq 2$. Dann gilt

$$|2x-4| + x < 5 \iff 2x - 4 + x < 5 \iff 3x < 9 \iff x < 3.$$

<u>2. Fall</u>: Sei $x < 2$. Dann gilt

$$|2x-4| + x < 5 \iff -2x + 4 + x < 5 \iff -x < 1 \iff x > -1.$$

Insgesamt erhalten wir für $x \in \mathbb{R}$:

$$|2x-4| + x < 5 \iff [(x \geq 2) \wedge (x < 3)] \vee [(x < 2) \wedge (x > -1)] \iff x \in (-1, 3). \qquad \square$$

(ii) (a) <u>*Behauptung:*</u> Es gelten $\max A = \sup A = \frac{5}{4}$, $\inf A = -1$ und $\min A$ existiert nicht.

<u>*Beweis:*</u> Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(-1)^n + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}.$$

Somit ist $\frac{5}{4}$ eine obere Schranke für A. Außerdem ist $\frac{5}{4} = (-1)^2 + \frac{1}{2^2} \in A$ und somit gilt $\max A = \sup A = \frac{5}{4}$.

Andererseits ist $(-1)^n + \frac{1}{n^2} \geq -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Folglich ist -1 eine untere Schranke von A. Als Nächstes zeigen wir, dass -1 die größte untere Schranke ist. Sei dazu $y \in \mathbb{R}$ mit $y > -1$

und $\varepsilon := y+1 > 0$. Nach Vorlesung existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m > \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} - \frac{1}{2}$. Setze $n_0 := 2m+1$. Dann gilt:

$$m > \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} - \frac{1}{2} \iff 2m > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1 \iff 2m+1 > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \iff \varepsilon > \frac{1}{(2m+1)^2}$$
$$\iff y+1 > \frac{1}{n_0^2} \iff y > \frac{1}{n_0^2} + (-1)^{n_0} \in A.$$

Folglich ist $y > -1$ keine untere Schranke von A und $inf A = -1$. Ferner gilt $(-1)^n + \frac{1}{n^2} \geq -1 + \frac{1}{n^2} > -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit $-1 \notin A$ und $\min A$ existiert nicht. $\square$

(b) *Behauptung:* $\sup B$ und $\max B$ existieren nicht.

Beweis: Angenommen es existiert ein $s \in \mathbb{R}$ mit $b \leq s$ für alle $b \in B$, d.h.

$$(+) \qquad \frac{x^3}{1+x^2} \leq s \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt insbesondere $s \geq 0 = \frac{0^3}{1+0^2} \in B$. Für $\hat{x} := 2s+1$ gilt:

$$\hat{x} > 2s \geq \left(\frac{1}{\hat{x}^2} + 1\right) s \quad \Rightarrow \quad \hat{x}^3 > \left(1 + \hat{x}^2\right) s \quad \Rightarrow \quad \frac{\hat{x}^3}{1+\hat{x}^2} > s,$$

was einen Widerspruch zu (+) darstellt. Folglich ist B nach oben unbeschränkt und $\sup B$ und $\max B$ existieren nicht. $\square$

Behauptung: Es gilt $\min B = \inf B = 0$.

Beweis: Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$: $\frac{x^3}{1+x^2} \geq 0$. Somit ist 0 eine untere Schranke für B. Des Weiteren gilt $0 = \frac{0^3}{1+0^2} \in B$, woraus folgt: $\min B = \inf B = 0$. $\square$

(iii) (a) *Behauptung:* Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n}$.

Beweis: IA: Für $n = 1$ gilt $\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} = \frac{2^2-1-2}{2^1}$.
IV: Für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$.
IS ($n \rightsquigarrow n+1$): Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{2 \cdot (2^{n+1} - n - 2) + n + 1}{2^{n+1}}$$
$$= \frac{(2^{n+2} - 2n - 4) + n + 1}{2^{n+1}} = \frac{(2^{n+1+1} - (n+1) - 2)}{2^{n+1}}.$$

$\square$

(b) *Behauptung:* Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n+1$.

Beweis: IA: Für $n = 1$ gilt $\prod_{k=1}^{1} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = 1 + \frac{1}{1} = 2 = 1+1$.
IV: Für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n+1$.
IS ($n \rightsquigarrow n+1$): Es gilt

$$\prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) \overset{\text{(IV)}}{=} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)(1+n)$$
$$= \left(1 + n + \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1}\right) = ((n+1)+1).$$

$\square$

Aufgabe 3:

(i) Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$.

(ii) Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$|x+5| \leq 2(4-x).$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(i) (a) *Behauptung:* Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

Beweis: IA: Für $n = 1$ gilt $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 = \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot (1+1)^2$.
IV: Für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.
IS ($n \rightsquigarrow n+1$): Es gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + (n+1)^3 = \frac{1}{4}(n^4 + 2n^3 + n^2) + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &= \frac{1}{4}(n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4) = \frac{1}{4}(n^2 + 2n + 1)(n^2 + 4n + 4) = \frac{1}{4}(n+1)^2((n+1)+1)^2.\end{aligned}$$

$\square$

(b) *Behauptung:* Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$.

Beweis: IA: Für $n = 1$ gilt $\sum_{k=1}^{1} k2^k = 2 = 0 \cdot 2^2 + 2$.
IV: Für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte bereits $\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$.
IS ($n \rightsquigarrow n+1$): Es gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k2^k &= \sum_{k=1}^{n} k2^k + (n+1)2^{n+1} \overset{\text{(IV)}}{=} (n-1)2^{n+1} + 2 + (n+1)2^{n+1} \\ &= 2^{n+1}(n-1+n+1) + 2 = 2^{n+2}n + 2 = ((n+1)-1)2^{(n+1)+1} + 2.\end{aligned}$$

$\square$

(ii) *Behauptung:* Die Ungleichung $|x+5| \leq 2(4-x)$ ist genau dann erfüllt, wenn $x \in (-\infty, 1]$ gilt.

Beweis: Wir betrachten die folgenden zwei Fälle:

Fall 1 ($x \geq -5$): In diesem Fall gilt $x + 5 \geq 0$ und somit ist die gegebene Ungleichung äquivalent zu

$$x + 5 \leq 8 - 2x \iff 3x \leq 3 \iff x \leq 1.$$

Die Ungleichung ist also für $x \in (-\infty, 1] \cap [-5, \infty) = [-5, 1]$ erfüllt.

Fall 2 ($x < -5$): In diesem Fall gilt $x + 5 < 0$ und wir erhalten $|x+5| = -(x+5)$. Damit ist die gegebene Ungleichung äquivalent zu

$$-(x+5) \leq 8 - 2x \iff x \leq 13.$$

Die Ungleichung ist also für $x \in (-\infty, 13] \cap (-\infty, -5) = (-\infty, -5)$ erfüllt.

Insgesamt wird die gegebene Ungleichung also für $x \in (-\infty, 1]$ erfüllt. $\square$

Aufgabe 4:
Es seien A und B nichtleere und beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit $A \cap B \neq \emptyset$. Zeigen Sie

$$\max\{\inf A, \inf B\} \leq \inf(A \cap B) \quad \text{sowie} \quad \sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}.$$

Geben Sie zudem Beispiele für A und B an, sodass obige Ungleichungen strikt sind.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:
Da A und B beschränkt sind und $A \cap B \neq \emptyset$ ist, gelten für $x \in A \cap B$:

$$\inf A \leq x \leq \sup A \quad \text{sowie} \quad \inf B \leq x \leq \sup B,$$

also $\max\{\inf A, \inf B\} \leq x \leq \min\{\sup A, \sup B\}$. Somit ist $\max\{\inf A, \inf B\}$ eine untere Schranke für $A \cap B$, insbesondere gilt $\max\{\inf A, \inf B\} \leq \inf(A \cap B)$. Genauso ist $\min\{\sup A, \sup B\}$ eine obere Schranke für $A \cap B$, weshalb $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$ gilt.

Um zu zeigen, dass die beiden Ungleichungen strikt sein können, betrachten wir als Beispiel die Mengen $A = [-3, -2] \cup [0, 1]$ und $B = [-1, 0] \cup [2, 3]$. Dann sind $A \cap B = \{0\}$ und

$$\max\{\inf A, \inf B\} = \max\{-3, -1\} = -1 < 0 = \inf(A \cap B)$$

sowie

$$\min\{\sup A, \sup B\} = \min\{1, 3\} = 1 > 0 = \sup(A \cap B).$$