

2. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2022/23

4. November 2022

Abgabe bis 11. November 2022, 13:00 Uhr

Aufgabe 5:

Eine Folge heißt **Nullfolge**, wenn sie gegen 0 konvergiert. Es sei $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine reelle Folge. Entscheiden Sie jeweils (durch Beweis oder Gegenbeispiel), welche der folgenden Bedingungen erzwingen, dass (a_n) eine Nullfolge ist:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Zahl n_0 , sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:

- (a) $|a_n| < \varepsilon^2$, (b) $|a_n \cdot a_{n+1}| < \varepsilon$,
(c) $|3a_n^2 + 6a_{n+2} + 4a_n^4 + a_n| < \varepsilon$, (d) $|a_n \cdot a_m| < \varepsilon$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 6 (K):

- (i) Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

- (ii) Untersuchen Sie die folgenden reellen Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. Beweisen Sie Ihre Aussagen.

- (a) $\left(\frac{1}{1+\sqrt{|n|}}\right)_{n=-3}^\infty$,
(b) $\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)_{n=1}^\infty$,
(c) $(a_n)_{n=0}^\infty$ definiert durch $a_0 := 0$ und $a_n := a_{n-1} + \frac{2}{5}n$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
(d) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $(a_n)^2 - 6a_n + 9 < \varepsilon^3$.

Aufgabe 7:

Es seien (a_n) und (b_n) reelle Folgen.

- (i) Es sei (a_n) beschränkt und $b_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Beweisen Sie, dass dann gilt: $a_n b_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).
(ii) Es sei (a_n) beschränkt und $b_n \rightarrow b$ ($n \rightarrow \infty$) mit $0 \neq b \in \mathbb{R}$. Ist dann die Folge $(a_n b_n)_{n=1}^\infty$ konvergent? Falls ja, beweisen Sie diese Aussage, anderenfalls geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 8:

- (i) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, (m, n) \mapsto 2^{m-1}(2n-1)$$

bijektiv ist.

- (ii) Es seien $A_1, A_2, \dots$ abzählbar viele abzählbare Mengen. Zeigen Sie, dass die Vereinigung

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n := \{a: \exists n \in \mathbb{N}: a \in A_n\}$$

ebenfalls abzählbar ist.

Informationen

Alle weiteren Informationen bezüglich der Themen **Übungsbetrieb**, **Scheinkriterien**, **Tutorien**, **Prüfung**, **Skript** und **Literaturhinweise** finden Sie auf der ILIAS-Seite der Vorlesung.

https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_1896358&client_id=produktiv

Übungsschein

Jede (K)-Aufgabe wird mit maximal 10 Punkten bewertet. Einen Übungsschein erhält, wer auf den Übungsblättern 1-7 und 8-14 **jeweils** mindestens 35 Punkte (50 % der möglichen Punktzahl) erzielt. Notwendig für den Erhalt des Übungsscheins ist eine Anmeldung im CAS-Portal. Diese ist ab sofort und noch bis zum **19.02.2023** möglich.