Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

Lösungsvorschlag zum 2. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2022/23

11. November 2022

Aufgabe 5:
Eine Folge heißt **Nullfolge**, wenn sie gegen 0 konvergiert. Es sei $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine reelle Folge. Entscheiden Sie jeweils (durch Beweis oder Gegenbeispiel), welche der folgenden Bedingungen erzwingen, dass (a_n) eine Nullfolge ist:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Zahl n_0, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:

(a) $|a_n| < \varepsilon^2$,

(b) $|a_n \cdot a_{n+1}| < \varepsilon$,

(c) $\left|3a_n^2 + 6a_{n+2} + 4a_n^4 + a_n\right| < \varepsilon$,

(d) $|a_n \cdot a_m| < \varepsilon$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

(a) *Behauptung:* Diese Bedingung erzwingt, dass (a_n) eine Nullfolge ist.

Beweis: Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Die Bedingung (a) impliziert, dass für $\tilde{\varepsilon} := \sqrt{\varepsilon} > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - 0| = |a_n| < \tilde{\varepsilon}^2 = \varepsilon$, d.h. (a_n) konvergiert gegen 0. □

(b) *Behauptung:* Diese Bedingung erzwingt nicht, dass (a_n) eine Nullfolge ist.

Beweis: Wir definieren die Folge (a_n) durch

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & n \text{ gerade}, \\ n, & n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Damit gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n \cdot a_{n+1} = \begin{cases} \frac{n+1}{n^2} \leq \frac{n+n}{n^2} = \frac{2}{n}, & n \text{ gerade}, \\ \frac{n}{(n+1)^2} \leq \frac{n}{n^2} \leq \frac{2}{n}, & n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Es sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$|a_n \cdot a_{n+1}| = a_n \cdot a_{n+1} \leq \frac{2}{n} \leq \frac{2}{n_0} < \varepsilon.$$

Die Folge (a_n) erfüllt somit die Bedingung (b), sie ist aber keine Nullfolge (sie ist nicht einmal beschränkt). □

(c) *Behauptung:* Diese Bedingung erzwingt nicht, dass (a_n) eine Nullfolge ist.

Beweis: Wir definieren die Folge $a_n := -1$ $(n \in \mathbb{N})$. Diese erfüllt offensichtlich die Bedingung (c), ist aber keine Nullfolge. □

(d) *Behauptung:* Diese Bedingung erzwingt, dass (a_n) eine Nullfolge ist.

Beweis: Die Bedingung (d) besagt, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|a_n \cdot a_m| < \varepsilon$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Insbesondere gilt die Ungleichung dann auch für $m = n$ und man erhält

$$|a_n \cdot a_n| < \varepsilon \quad \iff \quad |a_n|^2 < \varepsilon \quad \iff \quad |a_n| < \sqrt{\varepsilon}.$$

Aus letzterer Bedingung folgt, dass (a_n) eine Nullfolge ist, denn: sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann folgt, dass für $\tilde{\varepsilon} := \varepsilon^2 > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - 0| = |a_n| < \sqrt{\tilde{\varepsilon}} = \varepsilon$, d.h. (a_n) konvergiert gegen 0. $\square$

Aufgabe 6 (K):

(i) Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

(ii) Untersuchen Sie die folgenden reellen Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. Beweisen Sie Ihre Aussagen.

(a) $\left(\frac{1}{1+\sqrt{|n|}}\right)_{n=-3}^{\infty}$,

(b) $\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$,

(c) $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ definiert durch $a_0 := 0$ und $a_n := a_{n-1} + \frac{2}{5}n$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(d) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt: $(a_n)^2 - 6a_n + 9 < \varepsilon^3$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

(i) *Behauptung:* Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.

Beweis: Wir berechnen für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} + \frac{k \cdot n!}{k!(n-k+1)!} = \frac{n!(n-k+1+k)}{(k)!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

$\square$

(ii) (a) *Behauptung:* Die Folge $(a_n)_{n=-3}^{\infty}$ ist konvergent mit Grenzwert 0.

Beweis: Idee: Es genügt, (a_n) für “große” n zu betrachten. Endlich viele sind nicht relevant für Konvergenz.
Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Setze $N := [\frac{1}{\varepsilon^2} + 1]$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$:

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{1+\sqrt{|n|}} - 0\right| = \frac{1}{1+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{N}} < \varepsilon.$$

$\square$

(b) *Behauptung:* Die Folge (a_n) konvergiert gegen 1.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Setze $N := [\frac{1}{\varepsilon} + 1]$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$:

$$\left|\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) - 1\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

$\square$

(c) *Behauptung:* Die Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ist divergent.

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|a_{n-1} - a_n| = \frac{2}{5}n \geq \frac{2}{5}.$$

Wäre $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergent mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, so gäbe es zu jedem $\varepsilon < \frac{1}{5}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Somit würde (mit der Dreiecksungleichung) für alle $n > n_0$ folgen

$$\frac{2}{5} \leq |a_{n-1} - a_n| \leq \underbrace{|a_{n-1} - a|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|a_n - a|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon < \frac{2}{5},$$

ein Widerspruch. Somit kann $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ nicht konvergieren und ist daher per Definition divergent. □

(d) *Behauptung:* Die Folge (a_n) konvergiert gegen 3.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Setze $\tilde{\varepsilon} := \sqrt[3]{\varepsilon^2}$. Nach Voraussetzung existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt: $a_n^2 - 6a_n + 9 < \tilde{\varepsilon}^3$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ beliebig. Dann gilt:

$$|a_n - 3| = \sqrt{(a_n - 3)^2} = \sqrt{a_n^2 - 6a_n + 9} < \sqrt{\tilde{\varepsilon}^3} = \sqrt{\sqrt[3]{\varepsilon^2}^3} = \varepsilon.$$

□

Aufgabe 7:
Es seien (a_n) und (b_n) reelle Folgen.

(i) Es sei (a_n) beschränkt und $b_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Beweisen Sie, dass dann gilt: $a_n b_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

(ii) Es sei (a_n) beschränkt und $b_n \to b$ $(n \to \infty)$ mit $0 \neq b \in \mathbb{R}$. Ist dann die Folge $(a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergent? Falls ja, beweisen Sie diese Aussage, anderenfalls geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7:

(i) *Behauptung:* Es sei (a_n) eine beschränkte reelle Folge und (b_n) ein Nullfolge. Dann gilt $a_n b_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Beweis: Da (a_n) beschränkt ist, existiert ein $C > 0$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|a_n| \leq C$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $b_n \to 0$ für $n \to \infty$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass gilt: für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt: $|b_n - 0| < \frac{\varepsilon}{C}$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ beliebig. Dann gilt:

$$|a_n b_n - 0| = |a_n| \cdot |b_n| < C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon,$$

d.h. $(a_n b_n)$ konvergiert gegen 0. □

(ii) *Behauptung:* Es sei (a_n) eine beschränkte reelle Folge und $b_n \to b$ $(n \to \infty)$ mit $0 \neq b \in \mathbb{R}$. Dann ist die Folge $(a_n b_n)$ im Allgemeinen nicht konvergent.

Beweis: Setze $a_n := (-1)^n$ und $b_n := 1$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $|a_n| \leq 1$, $b_n \xrightarrow{n\to\infty} 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, d.h. die Voraussetzungen an (a_n) und (b_n) sind erfüllt. Aber die Folge $(a_n b_n) = ((-1)^n)$ konvergiert nicht (siehe Beispiel c) nach 2.1). □

Aufgabe 8:

(i) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$g \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (m, n) \mapsto 2^{m-1}(2n - 1)$$

bijektiv ist.

(ii) Es seien $A_1, A_2, \cdots$ abzählbar viele abzählbare Mengen. Zeigen Sie, dass die Vereinigung

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n := \{a \colon \exists n \in \mathbb{N} \colon a \in A_n\}$$

ebenfalls abzählbar ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 8:

(i) *Behauptung:* g ist bijektiv.

Beweis: Wir müssen zeigen, dass g sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Zur Injektivität: Seien $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ gegeben mit $g(m_1, n_1) = g(m_2, n_2)$. Wir nehmen an, dass $m_1 \neq m_2$. Sei o.B.d.A. $m_1 > m_2$ (anderenfalls vertauschen wir zuerst (m_1, n_1) und (m_2, n_2)), also $k := m_1 - m_2 \in \mathbb{N}$. Wir multiplizieren

$$(\star) \qquad 2^{m_1-1}(2n_1 - 1) = g(m_1, n_1) = g(m_2, n_2) = 2^{m_2-1}(2n_2 - 1)$$

mit 2^{1-m_2} und erhalten so $2^k(2n_1 - 1) = 2n_2 - 1$. Da die linke Seite gerade ist und die rechte Seite ungerade ist, kann Gleichheit nicht gelten und unsere Annahme muss falsch gewesen sein.

Also gilt $m_1 = m_2$ und aus $(\star)$ folgt $2n_1 - 1 = 2n_2 - 1$, also $n_1 = n_2$.

Zur Surjektivität: Sei $x \in \mathbb{N}$. Wir müssen zeigen, dass ein Paar $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ existiert mit $g(m, n) = x$.

Schritt 1: Wir zeigen, dass ein $k \in \mathbb{N}_0$ und eine ungerade Zahl $u \in \mathbb{N}$ existieren mit $x = 2^k u$.

Sei hierfür $T := \{l \in \mathbb{N}_0 \colon 2^l \text{ teilt } x\}$. Dann ist $T \neq \emptyset$, denn $0 \in T$. Weiter ist T nach oben beschränkt, denn für $l \geq x$ gilt $2^l \geq 1 + l \geq 1 + x$ (nach Bernoulli-Ungleichung), weshalb 2^l für diese l kein Teiler von x sein kann. Somit existiert ein größtes Element $k := \max T$ von T. Nach Definition von T existiert ein $u \in \mathbb{N}$ mit $2^k u = x$.

Annahme: u ist gerade. Dann lässt sich u schreiben als $u = 2\tilde{u}$ mit $\tilde{u} \in \mathbb{N}$, und wir können $x = 2^{k+1}\tilde{u}$ schreiben, weshalb $k + 1 \in T$ gilt. Dies widerspricht der Maximalität von k. Also muss die Annahme falsch gewesen sein.

Schritt 2: Wir definieren $m := k + 1 \in \mathbb{N}$ sowie $n := \frac{u+1}{2} \in \mathbb{N}$ (da $u \geq 1$ ungerade ist). Dann gilt $g(m, n) = 2^{m-1}(2n - 1) = 2^k u = x$. □

(ii) *Behauptung:* Es seien $A_1, A_2, \cdots$ abzählbar viele abzählbare Mengen. Dann ist die Vereinigung $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n := \{a \colon \exists n \in \mathbb{N} \colon a \in A_n\}$ ebenfalls abzählbar.

Beweis: Nach Voraussetzung existiert zu jeden $n \in \mathbb{N}$ eine surjektive Abbildung $\rho_n \colon \mathbb{N} \to A_n$. Wir definieren

$$h \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad (n, k) \mapsto \rho_n(k).$$

Die Funktion h ist surjektiv, denn: sei $y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $y \in A_n$. Da $\rho_n \colon \mathbb{N} \to A_n$ surjektiv ist, existiert auch ein $k \in \mathbb{N}$ mit $y = \rho_n(k) = h(n, k)$. Nach Teil $a)$ ist die dort definierte Abbildung g bijektiv, also insbesondere auch die Umkehrabbildung $g^{-1} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Insgesamt ist also auch die Funktion $f := h \circ g^{-1} \colon \mathbb{N} \to \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ surjektiv. Somit ist die Menge $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ abzählbar. □