Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

3. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2022/23

11. November 2022

Aufgabe 9:
Es seien (a_n) und (b_n) reelle Folgen. Entscheiden Sie jeweils (durch Beweis oder Gegenbeispiel), ob die folgenden Aussagen gelten:

(a) Ist (a_n) eine Nullfolge, so ist $(a_n \cdot b_n)$ beschränkt.

(b) Sind (a_n) sowie $(a_n + b_n)$ konvergent, so ist (b_n) beschränkt.

(c) Gilt $|a_{n+1}| < |a_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist (a_n) eine Nullfolge.

(d) Sind (a_n) beschränkt und (b_n) konvergent mit $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, so ist $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ beschränkt.

(e) Sind (a_n) und (b_n) konvergent mit Grenzwert a bzw. b, so konvergiert die Folge (c_n) mit $c_n := \max\{a_n, b_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ gegen $\max\{a, b\}$.

Aufgabe 10 (K):

(i) Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an:

(a) $a_n := \dfrac{n^2 + 3n - 4}{1 + n + 4n^2} \quad (n \in \mathbb{N})$,

(b) $a_n := \left(n - \dfrac{1}{n}\right)^{-n} \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$,

(c) $a_n := n^2 - \sqrt{n^2 + 29n} \quad (n \in \mathbb{N})$,

(d) $a_n := \displaystyle\prod_{k=3}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\})$.

(ii) Untersuchen Sie die folgende rekursiv definierte Folge (a_n) auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Grenzwert:

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := 1 + \frac{a_n^2}{4} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $a_n \in [1, 2]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 11:

(a) Zeigen Sie, dass die durch

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

definierte Folge (a_n) konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

(b) Es seien $N \in \mathbb{N}$ und $a_1, a_2, \ldots, a_N \in (0, \infty)$. Zeigen Sie, dass die durch

$$b_n := \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{N} a_k^n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

definierte Folge (b_n) konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 12:

(i) Untersuchen Sie, ob die rekursiv definierte Folge (a_n) konvergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Grenzwert.

$$a_1 := -\frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = a_n - a_n^2 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

(ii) Es seien $x \geq 0$ und $b_1 \in (\sqrt{x}, \infty)$. Die Folge (b_n) sei rekursiv definiert durch

$$b_{n+1} := \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{x}{b_n}\right) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

(a) Zeigen Sie, dass $b_n > \sqrt{x}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge (b_n) konvergiert und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \sqrt{x}$ gilt.

Informationen

Alle weiteren Informationen bezüglich der Themen **Übungsbetrieb**, **Scheinkriterien**, **Tutorien**, **Prüfung**, **Skript** und **Literaturhinweise** finden Sie auf der ILIAS-Seite der Vorlesung.

`https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_1896358&client_id=produktiv`

Übungsschein

Jede (K)-Aufgabe wird mit maximal 10 Punkten bewertet. Einen Übungsschein erhält, wer auf den Übungsblättern 1-7 und 8-14 **jeweils** mindestens 35 Punkte (50 % der möglichen Punktzahl) erzielt. Notwendig für den Erhalt des Übungsscheins ist eine Anmeldung im CAS-Portal. Diese ist ab sofort und noch bis zum **19.02.2023** möglich.