Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

Lösungsvorschlag zum 3. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2022/23

18. November 2022

Aufgabe 9:
Es seien (a_n) und (b_n) reelle Folgen. Entscheiden Sie jeweils (durch Beweis oder Gegenbeispiel), ob die folgenden Aussagen gelten:

(a) Ist (a_n) eine Nullfolge, so ist $(a_n \cdot b_n)$ beschränkt.

(b) Sind (a_n) sowie $(a_n + b_n)$ konvergent, so ist (b_n) beschränkt.

(c) Gilt $|a_{n+1}| < |a_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist (a_n) eine Nullfolge.

(d) Sind (a_n) beschränkt und (b_n) konvergent mit $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, so ist $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ beschränkt.

(e) Sind (a_n) und (b_n) konvergent mit Grenzwert a bzw. b, so konvergiert die Folge (c_n) mit $c_n := \max\{a_n, b_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ gegen $\max\{a, b\}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 9:

(a) *Behauptung:* Diese Aussage ist im Allgemeinen falsch.
Beweis: Wir betrachten dazu die Folgen (a_n), (b_n) gegeben durch $a_n := \frac{1}{n}$ und $b_n := n^2$ für $n \in \mathbb{N}$. Hier ist a_n eine Nullfolge, aber wegen $a_n b_n = n$ $(n \in \mathbb{N})$ ist die Folge $(a_n \cdot b_n)$ unbeschränkt. □

(b) *Behauptung:* Diese Aussage ist wahr.
Beweis: Da (a_n) und $(a_n + b_n)$ konvergieren, konvergiert auch $(b_n) = (a_n + b_n) - (a_n)$ nach Satz 2.2. Insbesondere ist (b_n) beschränkt. □

(c) *Behauptung:* Diese Aussage ist falsch.
Beweis: Wir betrachten die Folge (a_n) gegeben durch $a_n := 1 + \frac{1}{n}$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1 + 0 \neq 0$. Weiter ist

$$|a_n| - |a_{n+1}| = a_n - a_{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, und deshalb erfüllt (a_n) die Bedingungen von Teil (c). □

(d) *Behauptung:* Diese Aussage ist im Allgemeinen falsch.
Beweis: Wir betrachten die Folgen (a_n), (b_n) gegeben durch $a_n := 1$ und $b_n := \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist (a_n) beschränkt, (b_n) eine Nullfolge mit $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ ist unbeschränkt wegen $\frac{a_n}{b_n} = n$ für $n \in \mathbb{N}$. □

(e) *Behauptung:* Diese Aussage ist wahr.
Beweis: *Variante 1 – Direkter Beweis:* Sei o.B.d.A. $a \geq b$ (andernfalls vertausche (a_n) und (b_n)). Es sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren $n_0^{(1)} \in \mathbb{N}$ sowie $n_0^{(2)} \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0^{(1)}$ und $|b_n - b| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0^{(2)}$ gelten. Wir definieren $n_0 := \max\left\{n_0^{(1)}, n_0^{(2)}\right\}$. Dann gelten für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$:

$$c_n \geq a_n > a - \varepsilon, \quad a_n < a + \varepsilon, \quad b_n < b + \varepsilon \leq a + \varepsilon,$$

damit auch $c_n = \max\{a_n, b_n\} < a + \varepsilon$ und insgesamt $|c_n - a| < \varepsilon$. Dies zeigt die Konvergenz von c_n gegen $a = \max\{a, b\}$ für $n \to \infty$.

Variante 2 – Trick mit Betrag: Wir beweisen zuerst die Identität:

Behauptung: Es gilt $\max\{\alpha, \beta\} = \frac{\alpha+\beta}{2} + \left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Beweis: Fall 1: Sei $\alpha \geq \beta$. Dann ist $\frac{\alpha+\beta}{2} + \left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right| = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} = \alpha = \max\{\alpha, \beta\}$.
Fall 2: Sei $\alpha < \beta$. Dann ist $\frac{\alpha+\beta}{2} + \left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right| = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2} = \beta = \max\{\alpha, \beta\}$. $\square$

Diese Identität erlaubt uns, $c_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) + \frac{1}{2}|a_n - b_n|$ zu schreiben. Mit den Rechenregeln für Grenzwerte (Satz 2.2) erhalten wir die Konvergenz $c_n \to \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}|a-b| = \max\{a, b\}$ für $n \to \infty$. $\square$

Aufgabe 10 (K):

(i) Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an:

(a) $a_n := \dfrac{n^2 + 3n - 4}{1 + n + 4n^2} \quad (n \in \mathbb{N})$,

(b) $a_n := \left(n - \dfrac{1}{n}\right)^{-n} \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$,

(c) $a_n := n^2 - \sqrt{n^2 + 29n} \quad (n \in \mathbb{N})$,

(d) $a_n := \displaystyle\prod_{k=3}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\})$.

(ii) Untersuchen Sie die folgende rekursiv definierte Folge (a_n) auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Grenzwert:

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := 1 + \frac{a_n^2}{4} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $a_n \in [1, 2]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 10:

(i) (a) *Behauptung:* Es gilt $a_n \to \frac{1}{4}$ $(n \to \infty)$.

Beweis: Es gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{n^2 + 3n - 4}{1 + n + 4n^2} = \frac{n^2\left(1 + \frac{3}{n} - \frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + 4\right)} = \frac{1 + \frac{3}{n} - \frac{4}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + 4} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1 + 0 + 0}{0 + 0 + 4} = \frac{1}{4},$$

wobei bei der Grenzwertbildung die Rechenregeln aus Satz 2.2 angewandt wurden. $\square$

(b) *Behauptung:* Es gilt $a_n \to 0 \quad (n \to \infty)$.

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt $|a_n| = a_n$ und für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ berechnet man

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left(\frac{n^2 - 1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{n^2 - 1}\right)^n \leq \left(\frac{n}{n^2 - n}\right)^n = \left(\frac{1}{n - 1}\right)^n \\ &\leq \left(\frac{1}{3 - 1}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0, \end{aligned}$$

wobei die Konvergenz aus Beispiel 2.5 folgt. Die Behauptung folgt schließlich mit Satz 2.2. $\square$

(c) *Behauptung:* Die Folge (a_n) ist divergent.

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \left(n^2 - \sqrt{n^2 + 29n}\right) \cdot \frac{n^2 + \sqrt{n^2 + 29n}}{n^2 + \sqrt{n^2 + 29n}} = \frac{n^4 - \left(n^2 + 29n\right)}{n^2 + \sqrt{n^2 + 29n}} \\ &= n^2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{n^2} - \frac{29}{n^3}}{1 + \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{29}{n^3}}}. \end{aligned}$$

Mit Satz 2.2 und Beispiel 2.4 folgen, dass sowohl der Nenner als auch der Zähler gegen 1 gehen. Zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ existieren $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{29}{n^3}} < \frac{1}{2}$ $(n \geq n_0)$ und $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n^2} + \frac{29}{n^3} < \frac{1}{2}$ $(n \geq n_1)$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ gilt also

$$a_n \geq \frac{1}{3}n^2,$$

d.h. (a_n) ist unbeschränkt und nach Satz 2.1 somit divergent. $\square$

(d) *Behauptung:* Es gilt $a_n \to 0 \quad (n \to \infty)$.

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ gilt (Teleskop-Produkt):

$$a_n = \prod_{k=3}^{n} \left(\frac{k-1}{k}\right) = \left(\prod_{k=3}^{n} (k-1)\right) \cdot \left(\prod_{k=3}^{n} \frac{1}{k}\right) = \left(\prod_{k=2}^{n-1} k\right) \cdot \left(\prod_{k=3}^{n} \frac{1}{k}\right) = 2 \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

nach Satz 2.2. $\square$

(ii) *Behauptung:* (a_n) konvergiert gegen 2.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass (a_n) monoton wächst. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{n+1} - a_n = 1 + \frac{{a_n}^2}{4} - a_n = \left(1 - \frac{a_n}{2}\right)^2 \geq 0 \iff a_{n+1} \geq a_n.$$

Wir zeigen weiter, dass $a_n \in [1, 2]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, d.h. (a_n) ist beschränkt.

IA: Für $n = 1$ gilt $a_1 = 1 \in [1, 2]$.

IV: Für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte bereits $a_n \in [1, 2]$.

IS ($n \rightsquigarrow n+1$): Nach Induktionsvoraussetzung gilt $a_n \in [1, 2]$ und somit $0 \leq a_n^2 \leq 4$. Das führt zu den Abschätzungen

$$a_{n+1} = 1 + \frac{a_n^2}{4} \overset{\text{(IV)}}{\geq} 1 + 0 = 1 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = 1 + \frac{a_n^2}{4} \overset{\text{(IV)}}{\leq} 1 + \frac{4}{4} = 2.$$

Somit haben wir $a_n \in [1, 2]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt. Nach dem Monotoniekriterium konvergiert (a_n). Wir definieren nun $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Dann gilt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{4} = 1 + \frac{a^2}{4}.$$

Es folgt $(1 - \frac{a}{2})^2 = 0$, also $a = 2$. $\square$

Aufgabe 11:

(a) Zeigen Sie, dass die durch

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

definierte Folge (a_n) konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

(b) Es seien $N \in \mathbb{N}$ und $a_1, a_2, \ldots, a_N \in (0, \infty)$. Zeigen Sie, dass die durch

$$b_n := \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{N} a_k^n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

definierte Folge (b_n) konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 11:

(a) *Behauptung:* Die Folge (a_n) konvergiert gegen 1.

Beweis: Es sei $n \in \mathbb{N}$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n}.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{n^2}{n^2+n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \\ \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n} = 1,\end{aligned}$$

es gilt also $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \leq a_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1$ folgt mit den Rechenregeln für Grenzwerte (Satz 2.2), dass (a_n) gegen 1 konvergiert. $\square$

(b) *Behauptung:* Die Folge (b_n) konvergiert gegen $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$.

Beweis: Wir setzen $a_0 := \max\{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_0^n \leq \sum_{k=1}^{N} a_k^n \leq \sum_{k=1}^{N} a_0^n = N a_0^n.$$

Damit erhält man insbesondere

$$a_0 \leq \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{N} a_k^n} = b_n \leq \sqrt[n]{N} a_0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach der Vorlesung gilt $\sqrt[n]{N} \to 1$ $(n \to \infty)$, also gilt $\sqrt[n]{N} a_0 \to a_0$ $(n \to \infty)$. Mit dem "Sandwichkriterium" (Satz 2.2 e)) folgt $b_n \to a_0$ $(n \to \infty)$. $\square$

Aufgabe 12:

(i) Untersuchen Sie, ob die rekursiv definierte Folge (a_n) konvergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Grenzwert.

$$a_1 := -\frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = a_n - a_n^2 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

(ii) Es seien $x \geq 0$ und $b_1 \in (\sqrt{x}, \infty)$. Die Folge (b_n) sei rekursiv definiert durch

$$b_{n+1} := \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{x}{b_n}\right) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

(a) Zeigen Sie, dass $b_n > \sqrt{x}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge (b_n) konvergiert und $\lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{x}$ gilt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 12:

(i) *Behauptung:* Die Folge (a_n) divergiert.

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_{n+1} = a_n - a_n^2 \leq a_n$, d.h. (a_n) ist monoton fallend. Insbesondere gilt $a_n \leq a_1 = -\frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Angenommen (a_n) ist nach unten beschränkt. Nach dem Monotoniekriterium konvergiert dann die Folge (a_n), setze $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Nach der Rekursionsvorschrift gilt:

$$\begin{aligned} a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n - a_n^2 = a - a^2 \\ \iff \quad 0 = a^2 \iff a = 0. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zu $a_n \leq -\frac{1}{2}$ $(n \in \mathbb{N})$. Folglich war die Annahme falsch und (a_n) ist somit nach unten unbeschränkt, d.h. (a_n) divergiert. $\square$

(ii) (a) *Behauptung:* Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $b_n > \sqrt{x}$.

Beweis: Wir zeigen $b_n - \sqrt{x} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mittels vollständiger Induktion.
IA: Per Definition gilt $b_1 - \sqrt{x} > 0$.
IV: Für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte bereits $b_n - \sqrt{x} > 0$.
IS $(n \rightsquigarrow n+1)$: Es gilt

$$b_{n+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{x}{b_n}\right) - \sqrt{x} = \frac{1}{2b_n}\left(b_n^2 - 2\sqrt{x}b_n + x\right) = \frac{1}{2b_n}\left(b_n - \sqrt{x}\right)^2 \overset{\text{(IV)}}{>} 0,$$

da $\left(b_n - \sqrt{x}\right)^2 > 0$. Insgesamt gilt also $b_n > \sqrt{x}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

(b) *Behauptung:* (b_n) konvergiert gegen $\sqrt{x}$.

Beweis: Nach Teil (a) gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{x}{b_n}\right) < \frac{1}{2}(b_n + b_n) = b_n.$$

Damit ist (b_n) streng monoton fallend und nach Teil (a) nach unten beschränkt. Somit konvergiert (b_n) nach dem Monotoniekriterium.
Setze $b := \lim_{n\to\infty} b_n$. Dann gilt für $x \neq 0$:

$$b = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{x}{b_n}\right) = \frac{1}{2}\left(b + \frac{x}{b}\right).$$

Nach Satz 2.2 gilt $b \geq \sqrt{x} > 0$, also

$$b = \frac{1}{2}\left(b + \frac{x}{b}\right) \iff b^2 = x.$$

Also $b \in \{-\sqrt{x}, \sqrt{x}\}$ und wegen $b \geq \sqrt{x}$ muss $b = \sqrt{x}$ gelten. Für $x = 0$ folgt $b = \frac{1}{2}b$, also $b = 0$. Es gilt also auch $b = 0 = \sqrt{x}$. $\square$