Lösungsvorschlag zum 5. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2022/23

2. Dezember 2022

Aufgabe 17:

(i) Es sei (a_n) eine Folge, sodass für jedes $p \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_{p+n} - a_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Ist die Folge (a_n) dann konvergent?

(ii) Es sei (a_n) eine Folge und $q \in (0,1)$ mit

$$|a_{n+1} - a_n| < q^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass die Folge (a_n) konvergiert.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 17:

(i) *Voraussetzung:* Es sei (a_n) eine Folge, sodass für jedes $p \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_{p+n} - a_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Behauptung: Die Folge (a_n) ist im Allgemeinen nicht konvergent.

Beweis: Betrachte zum Beispiel die Folge (a_n) definiert durch

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

also die Folge der Partialsummen der harmonischen Reihe. Dann gilt:

$$a_{p+n} - a_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

für alle $p \in \mathbb{N}$, da jeder der endlich vielen Summanden für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Die Folge (a_n) divergiert jedoch, da die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent ist (siehe Vorlesung). □

(ii) *Voraussetzung:* Es seien (a_n) eine Folge und $q \in (0,1)$ mit

$$|a_{n+1} - a_n| < q^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Behauptung: Die Folge (a_n) konvergiert.

Beweis: Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ gilt (Teleskopsumme)

$$|a_m - a_n| = \left| \sum_{j=n}^{m-1} (a_{j+1} - a_j) \right| \le \sum_{j=n}^{m-1} |a_{j+1} - a_j| < \sum_{j=n}^{m-1} q^j.$$

Wegen $|q| < 1$ konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} q^j$. Das bedeutet, dass die Folge ihrer Partialsummen konvergiert. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\sum_{j=n}^{\infty} q^j\right| = \left|\sum_{j=0}^{\infty} q^j - \sum_{j=0}^{n-1} q^j\right| < \varepsilon$$

für alle $n \geq k_\varepsilon$. Für alle $m > n \geq k_\varepsilon$ gilt daher

$$|a_m - a_n| < \sum_{j=n}^{m-1} q^j < \sum_{j=n}^{\infty} q^j < \varepsilon.$$

Die Folge (a_n) ist also eine Cauchyfolge und somit konvergent. □

Aufgabe 18 (K):

(i) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Reihenwert an:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + 3n + 2}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt[n]{n}}$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(-\frac{1}{4}\right)^k\right)$.

(ii) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, absolute Konvergenz und Divergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n+1}}{n}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+2)^2}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 18:

(i) (a) *Behauptung:* Die Reihe divergiert.

Beweis: Setze

$$s_k := \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Durch Erweitern und mit Hilfe einer Teleskopsumme erhält man

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) \cdot (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})} = \sum_{n=1}^{k} \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \sqrt{k} - \sqrt{0} = \sqrt{k} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Die Folge der Partialsummen (s_k) ist unbeschränkt und somit divergent, was bedeutet, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$ divergiert. □

(b) *Behauptung:* Die Reihe konvergiert und hat den Reihenwert 1.

Beweis: Setze

$$s_k := \sum_{n=1}^{k} \frac{2}{n^2 + 3n + 2}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung und einer Teleskopsumme erhält man

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{2}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2}\right) = \frac{2}{2} - \frac{2}{k+2} \to \frac{2}{2} = 1 \quad (k \to \infty).$$

Da die Folge der Partialsummen (s_k) gegen 1 konvergiert, ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+3n+2}$ konvergent mit Reihenwert 1. □

(c) *Behauptung:* Die Reihe divergiert.

Beweis: Definiere die Folge (a_n) durch

$$a_n := \frac{1}{2\sqrt[n]{n}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Wegen $\sqrt[n]{n} \to 1$ $(n \to \mathbb{N})$ konvergiert die Folge (a_n) gegen $\frac{1}{2}$. Die Folge (a_n) ist also insbesondere keine Nullfolge. Aus Satz 3.1 (c) folgt, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dann divergiert. $\square$

(d) Die Reihe konvergiert und hat den Reihenwert 3.

Beweis: Mit dem binomischen Lehrsatz folgt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(-\frac{1}{4}\right)^k = \left(1 - \frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Wegen $\frac{3}{4} < 1$ handelt es sich somit um eine geometrische Reihe, diese konvergiert und es lässt sich ihr Reihenwert ausrechnen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(-\frac{1}{4}\right)^k \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n - 1 = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} - 1 = 4 - 1 = 3.$$

$\square$

(ii) (a) *Behauptung:* Die Reihe ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.

Beweis: Definiere die Folge (b_n) durch

$$b_n := \frac{\sqrt{n+1}}{n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Es gilt

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n} = \sqrt{\frac{n+1}{n^2}} = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

d.h. (b_n) ist eine Nullfolge. Weiter gilt (für alle $n \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned} b_{n+1} \le b_n \iff \frac{\sqrt{n+2}}{n+1} \le \frac{\sqrt{n+1}}{n} &\iff \frac{n+2}{(n+1)^2} \le \frac{n+1}{n^2} \\ &\iff n^3 + 2n^2 \le n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \iff 0 \le n^2 + 3n + 1. \end{aligned}$$

Letzteres ist eine wahre Aussage, sodass (b_n) insgesamt eine monoton fallende Nullfolge ist. Nach dem Leibnizkriterium (Satz 3.3) ist die Reihe daher konvergent. Des Weiteren gilt

$$\left| (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n+1}}{n} \right| = \frac{\sqrt{n+1}}{n} \ge \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \ge \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Da die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, divergiert nach dem Minorantenkriterium daher die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n+1}}{n} \right|$ ebenfalls. Somit ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n+1}}{n}$ nicht absolut konvergent. $\square$

(b) *Behauptung:* Die Reihe $\sum\limits_{n=-1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+2)^2}$ konvergiert absolut.

Beweis: Wir verwenden das Majorantenkriterium um die Behauptung zu zeigen. Wir definieren die Folge $(a_n)_{n=-1}^{\infty}$ durch $a_n := (-1)^n \frac{1}{(n+2)^2}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \ge -1$. Dann gilt

$$|a_n| = \frac{1}{(n+2)^2} \le \frac{1}{n^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+2)^2}$ nach dem Majorantenkriterium absolut konvergent und somit auch die Reihe $\sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+2)^2}$. $\square$

Aufgabe 19:

(i) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\binom{2n}{n}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2+n}{n^3+1}$.

(ii) Es sei (a_n) eine monoton fallende Folge und die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sei konvergent. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot a_n = 0.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 19:

(i) (a) *Behauptung:* Die Reihe divergiert.

Beweis: Wir definieren die Folge (a_n) durch $a_n := (-1)^n\binom{2n}{n}$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Dann gilt für alle $n\in\mathbb{N}$:

$$|a_n| = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+n)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n} \geq 1.$$

Damit ist (a_n) keine Nullfolge und somit kann die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\binom{2n}{n}$ nach Vorlesung nicht konvergieren. $\square$

(b) *Behauptung:* Die Reihe konvergiert, aber nicht absolut.

Beweis: Definiere die Folgen $(a_n), (b_n)$ und (c_n) durch

$$a_n := (-1)^n \underbrace{\frac{n^2}{n^3+1}}_{=:b_n} + \underbrace{\frac{n}{n^3+1}}_{=:c_n} \quad (n\in\mathbb{N}).$$

Es gilt:

$$b_n = \frac{n^2}{n^3+1} = \frac{1}{n+\frac{1}{n^2}} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

d.h. (b_n) ist eine Nullfolge. Weiter gilt für $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} b_{n+1}\leq b_n &\iff \frac{(n+1)^2}{(n+1)^3+1} \leq \frac{n^2}{n^3+1} \iff (n+1)^2\cdot(n^3+1) \leq n^2\cdot((n+1)^3+1)\\ &\iff n^5+n^2+2n^4+2n+n^3+1 \leq n^5+3n^4+3n^3+2n^2\\ &\iff 0\leq n^4+2n^3+n^2-2n-1 \iff 0\leq n^4+2n^3+(n-1)^2-2. \end{aligned}$$

Letzteres ist für alle $n\in\mathbb{N}$ erfüllt, daher ist (b_n) eine monoton fallende Nullfolge. Nach dem Leibnizkriterium ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ konvergent. Des Weiteren gilt:

$$|c_n| = \frac{1}{n^2+\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n^2} \quad (n\in\mathbb{N}).$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergiert, ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ nach dem Majorantenkriterium ebenfalls konvergent (sogar absolut konvergent). Insgesamt erhalten wir daraus die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Wir prüfen nun die Reihe noch auf absolute Konvergenz. Es gilt für $n\geq 2$:

$$|a_n| = \left|\frac{(-1)^n n^2+n}{1+n^3}\right| \geq \frac{n^2-n}{1+n^3} = \frac{1-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+n} \geq \frac{1-\frac{1}{n}}{2n} \geq \frac{1}{4n},$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass gilt: $\frac{1}{n^2}\leq 1\leq n$ $(n\in\mathbb{N})$ und $1-\frac{1}{n}\geq\frac{1}{2}$ für $n\geq 2$. Nach dem Minorantenkriterium divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist also nicht absolut konvergent. $\square$

(ii) <u>*Voraussetzung:*</u> Es sei (a_n) eine monoton fallende Folge und die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sei konvergent.

<u>*Behauptung:*</u> Dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a_n = 0$.

<u>*Beweis:*</u> Aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ folgt, dass (a_n) eine Nullfolge ist (Satz 3.1 (c)). Wegen der Monotonie der Folge erhalten wir somit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Es sei nun $\varepsilon > 0$. Wegen der Konvergenz der Reihe liefert das Cauchy-Kriterium die Existenz eines $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| = \sum_{k=m+1}^{n} a_k < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n > m \geq n_0.$$

Speziell gilt für $m = n_0$:

$$\sum_{k=n_0+1}^{n} a_k < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n > n_0. \tag{1}$$

Da (a_n) monoton fällt erhalten wir zudem

$$\sum_{k=n_0+1}^{n} a_k \geq (n - n_0) a_n. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) erhalten wir

$$n \cdot a_n < \frac{\varepsilon}{2} + n_0 \cdot a_n \quad \text{für alle } n > n_0. \tag{3}$$

Da (a_n) eine Nullfolge ist, existiert zudem ein $n_1 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_1$ gilt: $a_n < \frac{\varepsilon}{2n_0}$. Somit folgt mit (3):

$$0 \leq n \cdot a_n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq \max\{n_0, n_1\}.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war folgt schließlich $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a_n = 0$. $\square$

Aufgabe 20:
Es sei (a_n) eine reelle Folge. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent $\quad\Rightarrow\quad$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ ist konvergent.

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ ist konvergent $\quad\Rightarrow\quad$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent.

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent $\quad\Rightarrow\quad$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ ist konvergent.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 20:

(i) <u>Gegenbeispiel:</u> Für (a_n) mit $a_n := (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Leibniz-Kriterium konvergent. Jedoch ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nach der Vorlesung divergent.

(ii) <u>Gegenbeispiel:</u> Für (a_n) mit $a_n := \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergent. Allerdings ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nach der Vorlesung divergent.

(iii) <u>*Behauptung:*</u> Ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so ist auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergent.

Beweis: Wegen der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ ist die Folge $(|a_n|)$ eine Nullfolge. Daher gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n| = \big||a_n| - 0\big| \leq 1$$

und somit

$$a_n^2 = |a_n|^2 = |a_n| \cdot |a_n| \leq |a_n|$$

für alle $n \geq n_0$. Es gilt also $a_n^2 \leq |a_n|$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Daher ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ nach dem Majorantenkriterium absolut konvergent.

Bemerkung: Wegen $a_n^2 \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ damit natürlich auch absolut konvergent. $\square$