Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

6. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2022/23

2. Dezember 2022

Aufgabe 21:

(i) Prüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, absolute Konvergenz und Divergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n^2+4}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3-n}}$.

(ii) Es sei (a_n) eine monoton wachsende und beschränkte Folge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right)$$

konvergiert. Ist diese Aussage auch ohne die Beschränktheit der Folge (a_n) richtig?

Aufgabe 22 (K):

(i) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, absolute Konvergenz und Divergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{5^n}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{9^n (n!)^3}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$.

(ii) Untersuchen Sie, ob das Cauchyprodukt der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergiert und geben Sie gegebenenfalls den Reihenwert des Cauchyprodukts an:

(a) $a_n := \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^{\frac{2}{3}}}$, $b_n := \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^{\frac{1}{3}}}$ $\quad (n \in \mathbb{N}_0)$,

(b) $a_n := 4^{-n}$, $b_n := 5^{-n}$ $\quad (n \in \mathbb{N}_0)$.

Aufgabe 23:

(i) Zeigen Sie, dass das Cauchyprodukt der beiden divergenten Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ mit $a_0 := -1$, $a_n := 1$ $(n \in \mathbb{N})$ und $b_0 := 2$, $b_n := 2^n$ $(n \in \mathbb{N})$ absolut konvergiert.

(ii) Es sei (a_n) eine Folge mit $|a_n| > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei die Folge $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ beschränkt. Dann kann man zeigen, dass folgende Ungleichungskette gilt:

$$(*) \qquad \liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Zeigen Sie unter Verwendung von $(*)$, dass gilt:

$$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \to \mathrm{e} \quad (n \to \infty).$$

Aufgabe 24:

(i) Entwickeln Sie die durch die folgenden Abbildungsvorschriften definierten Funktionen in Potenzreihen um 0, und bestimmen Sie den Konvergenzradius:

(a) $x \mapsto \dfrac{E(x)}{1-x}$, (b) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x-2}$.

(ii) Bestimmen Sie die Funktion, welche durch die folgende Potenzreihe dargestellt wird:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} x^n.$$

Informationen

Alle weiteren Informationen bezüglich der Themen **Übungsbetrieb**, **Scheinkriterien**, **Tutorien**, **Prüfung**, **Skript** und **Literaturhinweise** finden Sie auf der ILIAS-Seite der Vorlesung.

`https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_1896358&client_id=produktiv`

Übungsschein

Jede (K)-Aufgabe wird mit maximal 10 Punkten bewertet. Einen Übungsschein erhält, wer auf den Übungsblättern 1-7 und 8-14 **jeweils** mindestens 35 Punkte (50 % der möglichen Punktzahl) erzielt. Notwendig für den Erhalt des Übungsscheins ist eine Anmeldung im CAS-Portal. Diese ist ab sofort und noch bis zum **19.02.2023** möglich.