Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

Lösungsvorschlag zum 6. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2022/23

9. Dezember 2022

Aufgabe 21:

(i) Prüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, absolute Konvergenz und Divergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n^2+4}$,   (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3-n}}$.

(ii) Es sei (a_n) eine monoton wachsende und beschränkte Folge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right)$$

konvergiert. Ist diese Aussage auch ohne die Beschränktheit der Folge (a_n) richtig?

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 21:

(i) (a) *Behauptung:* Die Reihe konvergiert absolut.

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $0 < \frac{1}{n^3+n^2+4} \le \frac{1}{n^3+0+0} = \frac{1}{n^3}$. Nach Vorlesung konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ genau dann, wenn $\alpha > 1$. Dies bedeutet, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konvergiert. Mit dem Majorantenkriterium folgt die Behauptung. □

(b) *Behauptung:* Die Reihe divergiert.

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge 2$ gilt:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{n^3-n}} \ge \frac{1}{\sqrt[4]{n^3-0}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$ wegen $\frac{3}{4} < 1$ divergiert, divergiert auch die gegebene Reihe nach dem Minorantenkriterium. □

(ii) *Behauptung:* Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right)$ konvergiert. Diese Aussage ist im Allgemeinen falsch, wenn man nicht verlangt, dass (a_n) beschränkt ist.

Beweis: Da (a_n) monoton wächst, gilt $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir möchten das Majorantenkriterium verwenden und schätzen dazu ab:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right| = \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} \le \frac{a_{n+1} - a_n}{a_1} =: b_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Nun gilt $b_n \ge 0$ ($n \in \mathbb{N}$) und es folgt für alle $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{N} b_n = \frac{a_{N+1} - a_1}{a_1} \le \frac{\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n - a_1}{a_1},$$

wobei wir bei der ersten Gleichheit ausgenutzt haben, dass es sich um eine Teleskopsumme handelt. Die Partialsummen sind also beschränkt und somit konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nach dem Monotoniekriterium. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert daher auch die gegebene Reihe.

Um zu zeigen, dass die Aussage im Allgemeinen für unbeschränkte Folgen (a_n) falsch ist, betrachten wir als Beispiel $a_n := n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 = \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$, die harmonische Reihe divergiert allerdings. $\square$

Aufgabe 22 (K):

(i) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, absolute Konvergenz und Divergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{5^n}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{9^n (n!)^3}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$.

(ii) Untersuchen Sie, ob das Cauchyprodukt der Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergiert und geben Sie gegebenenfalls den Reihenwert des Cauchyprodukts an:

(a) $a_n := \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^{\frac{2}{3}}}$, $b_n := \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^{\frac{1}{3}}}$ $\quad (n \in \mathbb{N}_0)$,

(b) $a_n := 4^{-n}$, $b_n := 5^{-n}$ $\quad (n \in \mathbb{N}_0)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 22:

(i) (a) *Behauptung:* Die Reihe ist absolut konvergent.

Beweis: Definiere die Folge (a_n) durch

$$a_n := \frac{n^5}{5^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Es gilt:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{5} \cdot (\sqrt[n]{n})^5 = \frac{1}{5} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{n} \cdots \sqrt[n]{n}}_{5\,\text{Faktoren}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{5} \cdot \underbrace{1 \cdots 1}_{5\,\text{Faktoren}} < 1.$$

Somit ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{5^n}$ nach dem Wurzelkriterium absolut konvergent. $\square$

(b) *Behauptung:* Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{9^n (n!)^3}$ divergiert.

Beweis: Setze $a_n := \frac{(3n)!}{9^n (n!)^3}$ $(n \in \mathbb{N})$ Damit gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{(3n+3)!}{9^{n+1}((n+1)!)^3} \cdot \frac{9^n (n!)^3}{(3n)!} = \frac{3(n+1)(3n+2)(3n+1)}{9(n+1)^3} \\
&= \frac{(3n+2)(3n+1)}{3(n+1)^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9n^2 + 9n + 2}{n^2 + 2n + 1} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{9 + \frac{9}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{9}{3} = 3 > 1,
\end{aligned}$$

d.h. $\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 3 > 1$. Nach dem Quotientenkriterium divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. $\square$

(c) *Behauptung:* Die Reihe ist absolut konvergent.

Beweis: Definiere die Folge (a_n) durch

$$a_n := \frac{1}{3^n}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Wir betrachten nun die Folge $b_n := \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Für die beiden Teilfolgen (b_{2k}) und (b_{2k-1}) gilt

$$b_{2k} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{\mathrm{e}}{3},$$
$$b_{2k-1} = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2k-1}\right)^{2k-1} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{3\mathrm{e}}.$$

Da die Folge (b_n) keine weiteren Häufungswerte hat, gilt $\limsup\limits_{n\to\infty} b_n = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\mathrm{e}}{3} < 1$, da $\mathrm{e} < 3$. Nach dem Wurzelkriterium ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$ daher absolut konvergent. $\square$

(ii) (a) *Voraussetzung:* Wir definieren zunächst die Folgen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ durch $a_n := \frac{1}{(n+1)^{\frac{2}{3}}}$ und $b_n := \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{3}}}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Behauptung: Das Cauchyprodukt aus $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$ divergiert.

Beweis: Das Cauchyprodukt ist gegeben durch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, wobei $c_n := \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k a_k (-1)^{n-k} b_{n-k}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für alle geraden $n \in \mathbb{N}_0$:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{\frac{2}{3}}}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k+1)^{\frac{1}{3}}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^{\frac{2}{3}}(n-k+1)^{\frac{1}{3}}} \geq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1} = 1,$$

wobei wir in der vorletzten Abschätzung $(k+1)^{\frac{2}{3}} \leq (n+1)^{\frac{2}{3}}$ und $(n-k+1)^{\frac{1}{3}} \leq (n+1)^{\frac{1}{3}}$ verwendet haben. Insgesamt ist daher $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ keine Nullfolge und somit kann die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ nicht konvergieren.

Bemerkung: Der Satz über die Konvergenz des Cauchyproduktes setzt die absolute Konvergenz beider Reihen voraus. Dies ist hier nicht der Fall, denn es gilt

$$\frac{1}{(n+1)^{\frac{2}{3}}} \geq \frac{1}{(2n)^{\frac{2}{3}}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{3}}} \geq \frac{1}{(2n)^{\frac{1}{3}}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)^{\frac{2}{3}}}\right| = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{\frac{2}{3}}}$, bzw. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)^{\frac{1}{3}}}\right| = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{3}}}$ divergieren nach dem Minorantenkriterium. $\square$

(b) *Behauptung:* Das Cauchyprodukt der beiden Reihen ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 20\left(4^{-(n+1)} - 5^{-(n+1)}\right)$. Diese konvergiert mit Reihenwert $\frac{5}{3}$.

Beweis: Das Cauchyprodukt der beiden Reihen ist per Definition die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ mit

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} 4^{-k}5^{-(n-k)} = 5^{-n}\sum_{k=0}^{n} 4^{-k}5^{k} = 5^{-n}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{5}{4}\right)^k = 5^{-n}\frac{1-\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{5}{4}}$$
$$= 5\cdot\frac{5^{-(n+1)}-4^{-(n+1)}}{-\frac{1}{4}} = 20\left(4^{-(n+1)}-5^{-(n+1)}\right) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Da die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 4^{-n}$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 5^{-n}$ als geometrische Reihen absolut konvergieren mit $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 4^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 5^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}$ folgt mit Satz 3.12 aus der Vorlesung die absolute Konvergenz des Cauchyprodukts und

$$\sum_{n=0}^{\infty} 20\Big(4^{-(n+1)} - 5^{-(n+1)}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} 5^{-n}\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{3}.$$

□

Aufgabe 23:

(i) Zeigen Sie, dass das Cauchyprodukt der beiden divergenten Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ mit $a_0 := -1,\ a_n := 1\ (n \in \mathbb{N})$ und $b_0 := 2,\ b_n := 2^n\ (n \in \mathbb{N})$ absolut konvergiert.

(ii) Es sei (a_n) eine Folge mit $|a_n| > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei die Folge $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ beschränkt. Dann kann man zeigen, dass folgende Ungleichungskette gilt:

$$(*) \qquad \liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Zeigen Sie unter Verwendung von $(*)$, dass gilt:

$$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \to \mathrm{e} \quad (n \to \infty).$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 23:

(i) <u>*Voraussetzung:*</u> Die beiden Folgen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ seien definiert durch $a_0 := -1,\ a_n := 1\ (n \in \mathbb{N})$ und $b_0 := 2,\ b_n := 2^n\ (n \in \mathbb{N})$.

<u>*Behauptung:*</u> Das Cauchyprodukt der beiden Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergiert absolut.

<u>*Beweis:*</u> Wir berechnen die Koeffizienten c_n des Cauchyprodukts. Zunächst ist $c_0 = a_0 b_0 = -2$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = a_n b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k} b_k + a_0 b_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k - 2^n \\ &\overset{l=k-1}{=} 2 - 2^n + 2\sum_{l=0}^{n-2} 2^l = 2 - 2^n + 2\frac{1-2^{n-1}}{1-2} = 0. \end{aligned}$$

Somit gelten $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = -2$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n| = 2$, d.h. das Cauchyprodukt der beiden Reihen ist absolut konvergent. □

(ii) <u>*Behauptung:*</u> Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \mathrm{e}$.

<u>*Beweis:*</u> Wir betrachten die Folge (a_n) gegeben durch $a_n = \frac{n^n}{n!}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für die Quotienten berechnen wir für $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} \mathrm{e}.$$

Insbesondere ist die Folge der Quotienten $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ beschränkt. Nach $(*)$ gilt nun:

$$\mathrm{e} = \liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \mathrm{e}.$$

Also gelten $\liminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \mathrm{e}$, d.h. e ist der einzige Häufungswert von $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$. Die gewünschte Aussage folgt nun aus der folgenden Bemerkung:

<u>*Behauptung:*</u> Es seien $b \in \mathbb{R}$ und (b_n) eine beschränkte reelle Folge mit $H(b_n) = \{b\}$. Dann gilt $b_n \to b$ $(n \to \infty)$.

<u>*Beweis:*</u> Es sei (b_{n_k}) eine beliebige Teilfolge von (b_n). Nach Bolzano-Weierstraß existiert eine konvergente Teilfolge $(b_{n_{k_j}})$ mit $b_{n_{k_j}} \to \beta$ $(j \to \infty)$ für ein $\beta \in \mathbb{R}$. Da $\beta \in H(b_n)$ muss $\beta = b$ sein. Die Behauptung folgt nun aus Übungsblatt 4, Aufgabe 13 (i). $\square$

Anmerkung: Die Beschränktheit der Folge $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ ist durch $(*)$ gewährleistet. $\square$

Aufgabe 24:

(i) Entwickeln Sie die durch die folgenden Abbildungsvorschriften definierten Funktionen in Potenzreihen um 0, und bestimmen Sie den Konvergenzradius:

(a) $x \mapsto \dfrac{E(x)}{1-x}$, (b) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x-2}$.

(ii) Bestimmen Sie die Funktion, welche durch die folgende Potenzreihe dargestellt wird:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} x^n.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 24:

(i) (a) <u>*Behauptung:*</u> Für alle $x \in (-1,1)$ gilt $\frac{E(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) x^n$, und die Potenzreihe auf der rechten Seite hat Konvergenzradius 1.

<u>*Beweis:*</u> Für die Faktoren $\frac{1}{1-x}$ sowie $E(x)$ sind Darstellungen als Potenzreihen bereits bekannt; es gelten $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ mit Konvergenzradius 1, sowie $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ mit Konvergenzradius ∞. Dann konvergiert das Cauchyprodukt dieser beider Potenzreihen für $x \in (-1,1)$ absolut, und die Koeffizienten des Cauchyprodukts sind gegeben durch

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} x^{n-k} \frac{x^k}{k!} = x^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Für $x \in (-1,1)$ gilt also

$$\frac{E(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right) x^n.$$

Es bleibt zu verifizieren, dass der Konvergenzradius r dieser Potenzreihe gleich 1 ist. Es gilt für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$1 = \frac{1}{0!} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{e},$$

und damit auch

$$\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}} \leq \sqrt[n]{\mathrm{e}}.$$

Da die untere und obere Schranke für $n \to \infty$ gegen 1 konvergieren, folgt mit dem Sandwichkriterium:

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}} = 1,$$

also $r = \frac{1}{\rho} = 1$. $\square$

(b) *Behauptung:* Für alle $x \in (-1,1)$ gilt $\frac{1}{x^2+x-2} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]x^n$, und die Potenzreihe auf der rechten Seite hat Konvergenzradius 1.

Beweis: Die Nullstellen von x^2+x-2 sind -2 sowie 1. Also gilt $x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $\frac{1}{x+2}$ und $\frac{1}{x-1}$ können wir aus der Vorlesung Potenzreihen herleiten. Es gelten

$$\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{1-x} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \text{für} \qquad x \in (-1,1),$$

sowie

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n \qquad \text{für } -\frac{x}{2} \in (-1,1) \iff x \in (-2,2).$$

Um für das Produkt $\frac{1}{x-1}\cdot\frac{1}{x+2}$ eine Potenzreihe zu finden, machen wir den Ansatz $\frac{1}{x-1}\cdot\frac{1}{x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$ mit $A, B \in \mathbb{R}$ *(alternativ kann man auch wie in Teil (a) die Koeffizienten des Cauchyproduktes berechnen)*. Es folgt

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{x-1}\cdot\frac{1}{x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \quad (-1<x<1) \\
\iff & \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)} \quad (-1<x<1) \\
\iff & 1 = Ax + 2A + Bx - B \quad (-1<x<1) \\
\overset{\substack{\text{Koeffizienten-}\\ \text{Vergleich}}}{\iff} & A + B = 0, \quad 2A - B = 1 \\
\iff & A = \tfrac{1}{3}, B = -\tfrac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Somit gilt für $x \in (-1,1)$:

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{1}{3}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\frac{1}{x+2} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left[-\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n\right]x^n.$$

Es bleibt zu zeigen, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe gleich 1 ist. Dazu berechnen wir:

$$\left|-\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n\right| = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n \begin{cases} \le \frac{1}{3} + \frac{1}{6}, \\ \ge \frac{1}{3} - \frac{1}{6}, \end{cases}$$

es gilt also $\sqrt[n]{\frac{1}{6}} \le \sqrt[n]{\left|-\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right|} \le \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$ für $n \in \mathbb{N}$ und mit dem Sandwichkriterium folgt

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|-\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|-\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n\right|} = 1,$$

entsprechend gilt $r = \frac{1}{\rho} = 1$. $\square$

(ii) *Behauptung:* Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!}x^n$ stellt die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^x + 1 - 2\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

dar.

Beweis: Setze $a_n := \frac{n-1}{(n+1)!}$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{n-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)\cdot\left(\frac{1}{n+2}\right) = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right)\cdot\left(\frac{1}{n+2}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

der Konvergenzradius der Potenzreihe ist somit unendlich, d.h. die Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut. Es sei nun $x \in \mathbb{R}$ beliebig.

Fall 1: Für $x = 0$ gilt: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} 0^n = 0 =: f(0)$,

Fall 2: Für $x \neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1-2}{(n+1)!} x^n &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)!} x^n \right) - 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} x^n \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n - \frac{2}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n - \frac{2}{x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n)!} x^n \\
&= \mathrm{e}^x - 1 - \frac{2}{x} (\mathrm{e}^x - 1 - x) = \mathrm{e}^x + 1 - 2 \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} =: f(x).
\end{aligned}$$

□