

7. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2022/23

9. Dezember 2022

Aufgabe 25:

Für $x \in \mathbb{R}$ seien die Funktionen **Sinus hyperbolicus** und **Cosinus hyperbolicus** definiert durch

$$\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{bzw.} \quad \cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Zeigen Sie die folgenden Identitäten für $x, y \in \mathbb{R}$:

- (a) $\sinh(x) = \frac{E(x) - E(-x)}{2}.$
- (b) $\cosh(x) = \frac{E(x) + E(-x)}{2}.$
- (c) $1 = \cosh(x)^2 - \sinh(x)^2.$
- (d) $\sinh(x+y) = \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y).$
- (e) $\cosh(x+y) = \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y).$

Aufgabe 26 (K):

- (i) Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Konvergenzradius sowie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, in denen die Potenzreihe konvergiert:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{n}{2}} x^n, & \text{(b)} \quad & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4 + (-1)^n)^{3n}} (x-1)^{3n}, \\ \text{(c)} \quad & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) x^n. \end{aligned}$$

- (ii) Es sei $q \in \mathbb{N}$ mit $q \geq 3$ und $0.\overline{21} = 0,212121\dots$ die q -adische Entwicklung einer Zahl $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie von q abhängige Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ mit $a = \frac{m}{n}$.

- (iii) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren. Der Definitionsbereich sei dabei jeweils die Menge der $x \in \mathbb{R}$, für die der Ausdruck erklärt ist.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3} \right), & \text{(b)} \quad & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x}{x^2 - x - 6}. \end{aligned}$$

Aufgabe 27:

- (i) Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Konvergenzradius sowie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, in denen die Potenzreihe konvergiert:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+3} \right)^{n^2-3n} x^n, & \text{(b)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) x^n. \end{aligned}$$

Hinweis zu (b): Zeigen Sie zunächst $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq n^2$.

- (ii) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren. Der Definitionsbereich sei dabei jeweils die Menge der $x \in \mathbb{R}$, für die der Ausdruck erklärt ist.

(a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^3 - 27},$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+4} - 2},$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+x} - 2}{x},$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^r - 1}{x - 1}$ mit $r \in \mathbb{Q}.$

Aufgabe 28:

- (i) Schreiben Sie die folgende Zahl als 8-adische Entwicklung: $0,0111_2$.
- (ii) (a) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Weiter sei $x_0 \in (a, b)$ und $w \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = w$ genau dann gilt, wenn $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = w$ und $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = w$.
- (b) Es sei die Funktion $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \frac{x^2}{|x|}$ gegeben. Zeigen Sie, dass der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existiert und bestimmen Sie dessen Wert.

Informationen

Alle weiteren Informationen bezüglich der Themen **Übungsbetrieb**, **Scheinkriterien**, **Tutorien**, **Prüfung**, **Skript** und **Literaturhinweise** finden Sie auf der ILIAS-Seite der Vorlesung.

https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_1896358&client_id=produktiv

Übungsschein

Jede (K)-Aufgabe wird mit maximal 10 Punkten bewertet. Einen Übungsschein erhält, wer auf den Übungsblättern 1-7 und 8-14 **jeweils** mindestens 35 Punkte (50 % der möglichen Punktzahl) erzielt. Notwendig für den Erhalt des Übungsscheins ist eine Anmeldung im CAS-Portal. Diese ist ab sofort und noch bis zum **19.02.2023** möglich.