Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

Lösungsvorschlag zum 7. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2022/23

16. Dezember 2022

Aufgabe 25:
Für $x \in \mathbb{R}$ seien die Funktionen **Sinus hyperbolicus** und **Cosinus hyperbolicus** definiert durch

$$\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{bzw.} \quad \cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Zeigen Sie die folgenden Identitäten für $x, y \in \mathbb{R}$:

(a) $\sinh(x) = \dfrac{E(x) - E(-x)}{2}$.

(b) $\cosh(x) = \dfrac{E(x) + E(-x)}{2}$.

(c) $1 = \cosh(x)^2 - \sinh(x)^2$.

(d) $\sinh(x + y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$.

(e) $\cosh(x + y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 25:
Zuerst merken wir an, dass beide Potenzreihen nach der Übung jeweils Konvergenzradius ∞ haben.

(a) *Behauptung:* Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sinh(x) = \frac{E(x)-E(-x)}{2}$.

Beweis: Da die Exponentialreihe nach der Vorlesung für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert, gilt für $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\frac{E(x) - E(-x)}{2} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right] - \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right]\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right] - \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right]\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) = \sinh(x).
\end{aligned}$$

□

(b) *Behauptung:* Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\cosh(x) = \frac{E(x)+E(-x)}{2}$.

Beweis: Analog zu (a) erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{E(x) + E(-x)}{2} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right] + \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right]\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right) = \cosh(x).
\end{aligned}$$

□

(c) <u>*Behauptung:*</u> Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $1 = \cosh(x)^2 - \sinh(x)^2$.

<u>*Beweis:*</u> Mit den Teilen (a), (b) und den Eigenschaften der Exponentialfunktion erhält man für $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\cosh^2(x) - \sinh(x)^2 &= \left(\frac{E(x)+E(-x)}{2}\right)^2 - \left(\frac{E(x)-E(-x)}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\big(\big[E(x)^2 + 2E(x)E(-x) + E(-x)^2\big] - \big[E(x)^2 - 2E(x)E(-x) + E(-x)^2\big]\big) \\
&= \frac{1}{4}(4E(x)E(-x)) = 1.
\end{aligned}$$

□

(d) <u>*Behauptung:*</u> Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$.

<u>*Beweis:*</u> Mit den Teilen (a), (b) und den Eigenschaften der Exponentialfunktion erhält man für $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&\cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y) \\
&\quad= \frac{E(x)+E(-x)}{2} \cdot \frac{E(y)-E(-y)}{2} + \frac{E(x)-E(-x)}{2} \cdot \frac{E(y)+E(-y)}{2} \\
&\quad= \frac{1}{4}\big(E(x)E(y) - E(x)E(-y) + E(-x)E(y) - E(-x)E(-y) \\
&\qquad + E(x)E(y) + E(x)E(-y) - E(-x)E(y) - E(-x)E(-y)\big) \\
&\quad= \frac{1}{4}(2E(x)E(y) - 2E(-x)E(-y)) = \frac{E(x+y) - E(-(x+y))}{2} = \sinh(x+y).
\end{aligned}$$

□

(e) <u>*Behauptung:*</u> Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$.

<u>*Beweis:*</u> Mit den Teilen (a), (b) und den Eigenschaften der Exponentialfunktion erhält man für $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&\cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) \\
&\quad= \frac{E(x)+E(-x)}{2} \cdot \frac{E(y)+E(-y)}{2} + \frac{E(x)-E(-x)}{2} \cdot \frac{E(y)-E(-y)}{2} \\
&\quad= \frac{1}{4}\big(E(x)E(y) + E(x)E(-y) + E(-x)E(y) + E(-x)E(-y) \\
&\qquad + E(x)E(y) - E(x)E(-y) - E(-x)E(y) + E(-x)E(-y)\big) \\
&\quad= \frac{1}{4}(2E(x)E(y) + 2E(-x)E(-y)) = \frac{E(x+y) + E(-(x+y))}{2} = \cosh(x+y).
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 26 (K):

(i) Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Konvergenzradius sowie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, in denen die Potenzreihe konvergiert:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{n}{2}} x^n$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4+(-1)^n)^{3n}} (x-1)^{3n}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})x^n$.

(ii) Es sei $q \in \mathbb{N}$ mit $q \geq 3$ und $0{,}\overline{21} = 0{,}212121...$ die q-adische Entwicklung einer Zahl $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie von q abhängige Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ mit $a = \frac{m}{n}$.

(iii) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren. Der Definitionsbereich sei dabei jeweils die Menge der $x \in \mathbb{R}$, für die der Ausdruck erklärt ist.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3}\right)$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - x}{x^2 - x - 6}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 26:

(i) (a) *Behauptung:* Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\frac{n}{2}} x^n$ hat den Konvergenzradius 0 und konvergiert daher nur für $x = 0$.

Beweis: Definiere

$$a_n := n^{\frac{n}{2}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Es gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = n^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}.$$

Da $(\sqrt{n})$ unbeschränkt ist, hat die Potenzreihe den Konvergenzradius 0, sie konvergiert daher nur in $x = 0$. □

(b) *Behauptung:* Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4+(-1)^n)^{3n}}(x-1)^{3n}$ hat den Konvergenzradius 3 und konvergiert genau dann, wenn $x \in (-2, 4)$.

Beweis: Substituiere $y := (x-1)^3$ und betrachte $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ mit $a_n := \frac{1}{(4+(-1)^n)^{3n}}$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{(4+(-1)^n)^3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}.$$

Somit ist diese Potenzreihe absolut konvergent für $|y| < 27$ und divergent für $|y| > 27$. Durch Rücksubstitution erhalten wir

$$|x-1|^3 = |y| < 27 \iff |x-1| < 3 \iff x \in (-2, 4),$$

d.h. der Konvergenzradius beträgt 3. Zu prüfen sind nun noch die Randpunkte: für $x = -2$ divergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4+(-1)^n)^{3n}}(-1)^{3n}3^{3n}$, weil die Folge $\left(\frac{1}{(4+(-1)^n)^{3n}}(-1)^{3n}3^{3n}\right)$ den Häufungswert -1 hat und somit keine Nullfolge ist. Die Potenzreihe divergiert also in $x = -2$. In $x = 4$ divergiert die Potenzreihe ebenso, da die Folge $\left(\frac{1}{(4+(-1)^n)^{3n}}3^{3n}\right)$ den Häufungswert 1 besitzt und somit ebenfalls keine Nullfolge sein kann. Daraus folgt die Behauptung. □

(c) *Behauptung:* Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})x^n$ hat den Konvergenzradius 1 und konvergiert genau dann, wenn $x \in (-1, 1]$.

Beweis: Es gilt für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$(\star) \qquad \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Durch geeignetes Abschätzen erhält man mit dem Sandwich-Theorem, dass

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}} = 1.$$

Daher ist der Konvergenzradius der Potenzreihe 1. In $x = 1$ gilt: wegen $(\star)$ ist $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ eine monoton fallende Nullfolge. Nach dem Leibnizkriterium konvergiert daher die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$. Im Fall $x = -1$ divergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ nach dem Minorantenkriterium, denn es gilt $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergiert. Daraus folgt die Behauptung. □

(ii) *Voraussetzung:* Es sei $q \in \mathbb{N}$ mit $q \geq 3$ und die Zahl a besitze die q-adische Entwicklung $0{,}212121\cdots$. Definiere $m := 2q + 1$ und $n := q^2 - 1$.

Behauptung: Dann gilt $a = \frac{m}{n}$.

Beweis: Dass $0{,}212121\cdots$ die q-adische Entwicklung von a ist, bedeutet definitionsgemäß

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{q^n} \quad \text{mit } z_0 = 0, z_1 = 2, z_2 = 1, z_3 = 2, z_4 = 1, \cdots.$$

Es ist also $z_0 = 0$ und $z_{2k-1} = 2$ sowei $z_{2k} = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Folglich gilt

$$\begin{aligned} a &= z_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_{2k-1}}{q^{2k-1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_{2k}}{q^{2k}} = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{q^{2k-1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q^{2k}} = (2q+1)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q^{2k}} \\ &= \frac{2q+1}{q^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{q^2}\right)^k = \frac{2q+1}{q^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{q^2}} = \frac{2q+1}{q^2} \cdot \frac{q^2}{q^2-1} = \frac{2q+1}{q^2-1}, \end{aligned}$$

d.h. wir können $m = 2q+1$ und $n = q^2 - 1$ wählen. $\square$

(iii) (a) *Behauptung:* Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3}\right)$ existiert und ist $-\frac{1}{4}$.

Beweis: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $8 - x^3 = (2-x)(4+2x+x^2)$. Damit folgt für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3}\right) &= \frac{1}{x(2-x)}\left(1 - \frac{12}{4+2x+x^2}\right) = \frac{1}{x(2-x)} \cdot \frac{4+2x+x^2-12}{4+2x+x^2} \\ &= \frac{1}{x(2-x)} \cdot \frac{(x-2)(x+4)}{4+2x+x^2} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{x+4}{4+2x+x^2}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3}\right) = \lim_{x\to 2} -\frac{1}{x} \cdot \frac{x+4}{4+2x+x^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2+4}{4+2\cdot 2+2^2} = -\frac{6}{24} = -\frac{1}{4}.$$

$\square$

(b) *Behauptung:* Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-x}{x^2-x-6}$ existiert nicht.

Beweis: Es gilt

$$(x^2 - x - 6) = (x-3)(x+2) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Für die Folge $x_n := 3 + \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ gilt $x_n \to 3$ für $n \to \infty$ und

$$\frac{x_n^2 - x_n}{x_n^2 - x_n - 6} = \frac{1}{x_n - 3} \cdot \frac{x_n^2 - x_n}{x_n + 2} = n \cdot \frac{(3+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{5+\frac{1}{n}} \geq n,$$

d.h. die obige Folge divergiert und somit existiert der gesuchte Grenzwert nicht. $\square$

Aufgabe 27:

(i) Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Konvergenzradius sowie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, in denen die Potenzreihe konvergiert:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+3}\right)^{n^2-3n} x^n,$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n!} \frac{1}{k}\right) x^n.$

Hinweis zu (b): Zeigen Sie zunächst $\sum\limits_{k=1}^{n!} \frac{1}{k} \leq n^2$.

(ii) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren. Der Definitionsbereich sei dabei jeweils die Menge der $x \in \mathbb{R}$, für die der Ausdruck erklärt ist.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2+2x-15}{x^3-27},$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+4}-2},$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x},$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^r-1}{x-1}$ mit $r \in \mathbb{Q}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 27:

(i) (a) <u>*Behauptung:*</u> Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n}{n+3}\right)^{n^2-3n} x^n$ hat den Konvergenzradius e^3 und konvergiert genau dann, wenn $|x| < \mathrm{e}^3$.

<u>*Beweis:*</u> Setze $a_n := \left(\frac{n}{n+3}\right)^{n^2-3n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{|a_n|} &= \left(\frac{n}{n+3}\right)^{n-3} = \left(\frac{n+3}{n}\right)^{3-n} = \left[\left(\frac{n+3}{n+2}\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}\right)^{n-3}\right]^{-1} \\
&= \left[\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n-3}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n-3}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-3}\right]^{-1} \\
&= \left[\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{-1}\cdot\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^5\cdot\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^4\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \\
&\xrightarrow{n\to\infty} \mathrm{e}^{-3}.
\end{aligned}$$

Somit gilt für den Konvergenzradius $\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} = \mathrm{e}^3$. Die Potenzreihe konvergiert also für alle $|x| < \mathrm{e}^3$ und divergiert für $|x| > \mathrm{e}^3$. Es sei nun $x \in \{\pm\mathrm{e}^3\}$. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3k]{|a_{3k}x^{3k}|} &= \sqrt[3k]{\left(\frac{3k}{3k+3}\right)^{9k^2-9k}}\,\mathrm{e}^3 = \left(\frac{3k+3}{3k}\right)^3\left[\left(\frac{3k+3}{3k}\right)^{3k}\right]^{-1}\mathrm{e}^3 \\
&= \underbrace{\left(1+\frac{1}{k}\right)^3}_{\geq 1}\underbrace{\left(\frac{\mathrm{e}}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}\right)^3}_{\geq 1} \geq 1,
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt ausgenutzt wurde, dass die Folge $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ monoton wachsend ist und gegen e konvergiert. Also ist $(a_n x^n)$ für $x \in \{\pm\mathrm{e}^3\}$ keine Nullfolge, d.h. die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ divergiert, womit die Behauptung folgt. $\square$

(b) <u>*Voraussetzung:*</u> Es sei die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n!}\frac{1}{k}\right)x^n$ gegeben.

<u>*Behauptung:*</u> Der Konvergenzradius ist 1 und die Potenzreihe konvergiert genau dann, wenn $x \in (-1, 1)$.

<u>*Beweis:*</u> Definiere die Folge (a_n) durch

$$a_n := \sum_{k=1}^{n!}\frac{1}{k} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Wir zeigen zunächst den Hinweis mittels vollständiger Induktion:

<u>IA</u>: Für $n = 1$ gilt $\sum\limits_{k=1}^{1!}\frac{1}{k} = 1 \leq 1^2$.

<u>IV</u>: Für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte bereits $\sum\limits_{k=1}^{n!}\frac{1}{k} \leq n^2$.

<u>IS $(n \rightsquigarrow n+1)$</u>: Es gilt:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \sum_{k=1}^{(n+1)!}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n!}\frac{1}{k} + \sum_{k=n!+1}^{n!+n\cdot n!}\frac{1}{k} \overset{\text{(IV)}}{\leq} n^2 + \sum_{k=1}^{n\cdot n!}\frac{1}{n!+k} \leq n^2 + \frac{n\cdot n!}{n!+1} \\
&\leq n^2 + n \leq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.
\end{aligned}$$

Da $a_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, erhalten wir

$$1 \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 1,$$

d.h. $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Somit ist der Konvergenzradius 1 und die Potenzreihe konvergiert für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| > 1$. Für $x = 1$ divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, da (a_n) keine Nullfolge ist. Auch die Folge $((-1)^n a_n)$ ist keine Nullfolge, daher divergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. Insgesamt konvergiert die Potenzreihe also für $x \in (-1, 1)$. □

(ii) (a) *Behauptung:* Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2+2x-15}{x^3-27}$ existiert und ist $\frac{8}{27}$.

Beweis: Es gilt

$$\frac{x^2+2x-15}{x^3-27} = \frac{(x-3)(x+5)}{(x^2+3x+9)(x-3)} = \frac{x+5}{x^2+3x+9}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Damit erhalten wir

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2+2x-15}{x^3-27} = \lim_{x\to 3} \frac{x+5}{x^2+3x+9} = \frac{8}{27}.$$

□

(b) *Behauptung:* Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$ existiert und ist 4.

Beweis: Es gilt für $x \neq 0$:

$$\frac{x}{\sqrt{x+4}-2} = \frac{x(\sqrt{x+4}+2)}{x+4-4} = \sqrt{x+4}+2.$$

Damit erhalten wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+4}-2} = \lim_{x\to 0} \sqrt{x+4}+2 = 4.$$

□

(c) *Behauptung:* Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x}$ existiert und ist $\frac{1}{12}$.

Beweis: Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt folgende Gleichheit:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2).$$

Mit $a := \sqrt[3]{8+x}$ und $b := 2$ ergibt sich mit obiger Darstellung

$$\sqrt[3]{8+x} - 2 = a - b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2} = \frac{(\sqrt[3]{8+x})^3 - 2^3}{(\sqrt[3]{8+x})^2 + 2\sqrt[3]{8+x} + 2^2} = \frac{x}{(\sqrt[3]{8+x})^2 + 2\sqrt[3]{8+x} + 4}.$$

Daraus folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{8+x})^2 + 2\sqrt[3]{8+x} + 4} = \frac{1}{(\sqrt[3]{8+0})^2 + 2\sqrt[3]{8+0} + 4} = \frac{1}{12}.$$

□

(d) *Behauptung:* Für $r \in \mathbb{Q}$ existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^r-1}{x-1}$ und ist r.

Beweis: Für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(*) \qquad x^n - 1 = (x-1)\sum_{k=0}^{n-1} x^k.$$

Für $r \in \mathbb{Q}$ schreiben wir $r = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$. Es sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Wir machen eine Fallunterscheidung:

1) Es sei $r > 0$, d.h. $p \in \mathbb{N}$. Dann gilt mit $(*)$

$$x^{\frac{p}{q}} - 1 = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p - 1 = \left(x^{\frac{1}{q}} - 1\right) \sum_{k=0}^{p-1} x^{\frac{k}{q}}$$

und

$$x - 1 = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^q - 1 = \left(x^{\frac{1}{q}} - 1\right) \sum_{k=0}^{q-1} x^{\frac{k}{q}},$$

also gilt

$$\frac{x^r - 1}{x - 1} = \frac{\left(x^{\frac{1}{q}} - 1\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{p-1} x^{\frac{k}{q}}\right)}{\left(x^{\frac{1}{q}} - 1\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{q-1} x^{\frac{k}{q}}\right)} \overset{x \neq 1}{=} \frac{\sum_{k=0}^{p-1} x^{\frac{k}{q}}}{\sum_{k=0}^{q-1} x^{\frac{k}{q}}} \xrightarrow{x \to 1} \frac{\sum_{k=0}^{p-1} 1}{\sum_{k=0}^{q-1} 1} = \frac{p}{q} = r.$$

2) Es sei $r = 0$, dann gilt $\frac{x^0 - 1}{x - 1} = 0 \xrightarrow{x \to 1} 0$.

3) Es sei $r < 0$, d.h. $-p \in \mathbb{N}$. Dann ergibt sich

$$\frac{x^r - 1}{x - 1} = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{-r} - 1}{x - 1} = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{-r} - 1}{\frac{1}{x} - 1} \cdot \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{-r} - 1}{\frac{1}{x} - 1} \cdot \frac{1 - x}{x(x - 1)} = \underbrace{\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{-r} - 1}{\frac{1}{x} - 1}}_{\to -r \text{ (Fall } 1))} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{x}\right)}_{\to -1}$$

$$\xrightarrow{x \to 1} (-r) \cdot (-1) = r.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Aufgabe 28:

(i) Schreiben Sie die folgende Zahl als 8-adische Entwicklung: $0{,}0111_2$.

(ii) (a) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$. Weiter sei $x_0 \in (a, b)$ und $w \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\lim_{x \to x_0} f(x) = w$ genau dann gilt, wenn $\lim_{x \to x_0-} f(x) = w$ und $\lim_{x \to x_0+} f(x) = w$.

(b) Es sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) := \frac{x^2}{|x|}$ gegeben. Zeigen Sie, dass der Grenzwert $\lim_{x \to 0} f(x)$ existiert und bestimmen Sie dessen Wert.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 28:

(i) Behauptung: Es gilt $0{,}0111_2 = 0{,}34_8$.

Beweis: Es gilt $0{,}0111_2 = \frac{7}{16} = 0{,}4375$. Mit dem Algorithmus aus der Vorlesung ergibt sich für $a = 0{,}4375$ und $q = 8$:

$$\begin{aligned} z_0 &= [0,4375] = 0, & a_0 &= 0,4375 - 0 = 0,4375, \\ z_1 &= [\tfrac{7}{16} \cdot 8] = [\tfrac{7}{2}] = 3, & a_1 &= \tfrac{7}{2} - 3 = \tfrac{1}{2}, \\ z_2 &= [\tfrac{1}{2} \cdot 8] = [4] = 4, & a_2 &= 4 - 4 = 0 \end{aligned}$$

und $z_n = 0$ für alle $n \geq 3$. Somit ergibt sich die 8-adische Entwicklung $0{,}4375 = 0{,}34_8$. □

(ii) (i) Behauptung: $\lim_{x \to x_0} f(x) = w \iff \left[\lim_{x \to x_0-} f(x) = w, \ \lim_{x \to x_0+} f(x) = w\right]$.

Beweis: $\Rightarrow$: Wenn $\lim_{x\to x_0} f(x) = w$, dann gilt insbesondere $\lim_{x\to x_0-} f(x) = w$ und $\lim_{x\to x_0+} f(x) = w$.

$\Leftarrow$: Es gelte also $f(x) \to w$ für $x \to x_0+$ und $f(x) \to w$ für $x \to x_0-$. Es sei (x_n) eine beliebige Folge in $(a,b) \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$. Es ist zu zeigen, dass $f(x_n) \to w$ für $n \to \infty$.
Wir betrachten dazu die Teilmengen der Folgenindizes

$$J^- := \{n \in \mathbb{N} \colon x_n < x_0\} \qquad \text{und} \qquad J^+ := \{n \in \mathbb{N} \colon x_n > x_0\}.$$

Da $J^- \cup J^+ = \mathbb{N}$, ist mindestens eine der Mengen unendlich.

Falls eine dieser Mengen endlich ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $x_n < x_0$ für alle $n \geq n_0$ oder $x_n > x_0$ für alle $n \geq n_0$. Nach Voraussetzung gilt dann für die Folge $(x_n)_{n=n_0}^{\infty}$, dass $f(x_n) \to w$ für $n \to \infty$. Dasselbe gilt dann auch für die Folge (x_n).

Es seien nun J^- und J^+ unendlich. Dann gibt es bijektive Abbildungen $\eta_1 \colon \mathbb{N} \to J^-$ und $\eta_2 \colon \mathbb{N} \to J^+$, sodass $\eta_\nu(j+1) > \eta_\nu(j)$ für $\nu \in \{1,2\}$. (Wir erhalten diese Abbildungen, indem wir J^-, bzw. J^+ geordnet abzählen.) Dann haben wir Teilfolgen $(x_{\eta_1(j)})_{j=1}^{\infty}$ und $(x_{\eta_2(j)})_{j=1}^{\infty}$ mit $x_{\eta_1(j)} < x_0$ und $x_{\eta_2(j)} > x_0$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Beachte, dass diese Teilfolgen die Folge (x_n) vollständig zerlegen (d.h. für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $j \in \mathbb{N}$, sodass $n = \eta_1(j)$ oder $n = \eta_2(j)$). Nach Voraussetzung gelten $f(x_{\eta_1(j)}) \to w$ und $f(x_{\eta_2(j)}) \to w$ für $(j \to \infty)$. Also besitzt die Folge $(f(x_n))$ genau einen Häufungspunkt, nämlich w. Sie konvergiert somit gegen w für $n \to \infty$. $\square$

(ii) *Behauptung:* Es gilt $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{|x|} = 0$.

Beweis: Für $x \in (-\infty, 0)$ gilt $f(x) = \frac{x^2}{|x|} = \frac{x^2}{-x} = -x$ und somit $\lim_{x\to 0-} f(x) = 0$. Gilt hingegen $x \in (0,\infty)$, dann haben wir $f(x) = \frac{x^2}{|x|} = \frac{x^2}{x} = x$ und somit $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$. Aufgabenteil (i) liefert somit $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. $\square$