Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

8. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2022/23

16. Dezember 2022

Abgabe bis 23. Dezember 2022, 13:00 Uhr

Aufgabe 29:

(i) Es seien $f, g\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ Funktionen. Entscheiden Sie jeweils (durch Beweis oder Gegenbeispiel), ob die folgenden Aussagen gelten:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ und $|g(x)| \le 8$ für $x \in (0,1) \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x) = 0.$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)^2$ existiert $\quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existiert.

(ii) Es seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass dann bereits $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.

Aufgabe 30 (K):

(i) Untersuchen Sie jeweils, ob der Grenzwert existiert und bestimmen Sie gegebenenfalls dessen Wert. Als Werte sind auch ∞ und $-\infty$ zugelassen.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{23}\left(\left(1+\frac{23}{x}\right)^{23} - 1\right)$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{E(x)}{x}$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{2(x^2+1)(x^2-4)}{|x|^3}$.

(ii) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die folgende Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist:

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^3-3x^2}{x^2-9}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}, \\ \frac{5}{2}, & x = -3, \\ \frac{3}{2}, & x = 3. \end{cases}$$

(iii) Zeigen Sie mithilfe des Zwischenwertsatzes, dass die folgende Gleichung eine Lösung $x > 0$ besitzt:

$$E(\cos(x)) - x^7 = \sin(x^3).$$

Aufgabe 31:

(i) Wie müssen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sqrt{\frac{1}{x}+1} - \sqrt{x+1}}{x-1}, & \text{für } x > 1, \\ \beta, & \text{für } x = 1, \\ \alpha \frac{x^3-x^2+2x-2}{x-1}, & \text{für } 0 < x < 1, \end{cases}$$

auf $(0,\infty)$ stetig ist?

(ii) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(0) = 1$ und $f(x+y) \le f(x)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie die Äquivalenz

$$f \text{ ist stetig} \iff f \text{ ist stetig in } 0.$$

Aufgabe 32:

(i) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die folgende Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist.

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^2-x}{x^2-5x+4}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}, \\ \frac{3x-10}{x+2}, & x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(ii) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f in jedem $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ unstetig ist.

(b) Begründen Sie, dass f in 0 stetig ist.

Informationen

Alle weiteren Informationen bezüglich der Themen **Übungsbetrieb**, **Scheinkriterien**, **Tutorien**, **Prüfung**, **Skript** und **Literaturhinweise** finden Sie auf der ILIAS-Seite der Vorlesung.

`https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_1896358&client_id=produktiv`

Übungsschein

Jede (K)-Aufgabe wird mit maximal 10 Punkten bewertet. Einen Übungsschein erhält, wer auf den Übungsblättern 1-7 und 8-14 **jeweils** mindestens 35 Punkte (50 % der möglichen Punktzahl) erzielt. Notwendig für den Erhalt des Übungsscheins ist eine Anmeldung im CAS-Portal. Diese ist ab sofort und noch bis zum **19.02.2023** möglich.