Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

Lösungsvorschlag zum 8. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2022/23

23. Dezember 2022

Aufgabe 29:

(i) Es seien $f, g\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ Funktionen. Entscheiden Sie jeweils (durch Beweis oder Gegenbeispiel), ob die folgenden Aussagen gelten:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ und $|g(x)| \leq 8$ für $x \in (0,1) \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x) = 0.$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)^2$ existiert $\quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existiert.

(ii) Es seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass dann bereits $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 29:

(i) (a) *Behauptung:* Es seien $f, g\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ und $|g(x)| \leq 8$ für $x \in (0,1)$. Dann gilt $\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x) = 0$.

Beweis: Es sei (x_n) eine Folge in $(0,1)$ mit $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Dann konvergiert wegen $-8|f(x_n)| \leq f(x_n)g(x_n) \leq 8|f(x_n)|$ das Produkt $f(x_n)g(x_n) \to 0$ $(n \to \infty)$ nach dem Sandwichkriterium. Per Definition der Konvergenz gilt also $\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x) = 0$. $\square$

(b) *Behauptung:* Es existieren Funktionen $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$, sodass $\lim\limits_{x\to 0} f(x)^2$ existiert, der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ aber nicht existiert.

Beweis: Wir betrachten die Funktion

$$f\colon (0,1) \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Um zu sehen, dass der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ nicht existiert, betrachten wir die Folge (x_n) definiert durch

$$x_n \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ gerade}, \\ \frac{1}{\sqrt{2}n}, & n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Da $\sqrt{2}$ irrational ist, gilt $f(x_n) = (-1)^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ konvergiert nicht, weshalb der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ nach Definition nicht existiert.
Zuletzt gilt $f(x)^2 = 1$ für $x \in (0,1)$ und damit auch $\lim\limits_{x\to 0} f(x)^2 = 1$. $\square$

(ii) *Behauptung:* Es gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis: Es sei $x \in \mathbb{R}$. Dann existiert eine Folge (x_n) in $\mathbb{Q}$ mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$ Aus der Stetigkeit von f und g folgt nun

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x),$$

womit die Behauptung gezeigt ist. $\square$

Aufgabe 30 (K):

(i) Untersuchen Sie jeweils, ob der Grenzwert existiert und bestimmen Sie gegebenenfalls dessen Wert. Als Werte sind auch ∞ und $-\infty$ zugelassen.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$, (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{23}\left(\left(1+\dfrac{23}{x}\right)^{23}-1\right)$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{E(x)}{x}$, (d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2(x^2+1)(x^2-4)}{|x|^3}$.

(ii) Bestimmen Sie alle $x\in\mathbb{R}$, in denen die folgende Funktion $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig ist:

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^3-3x^2}{x^2-9}, & x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,3\},\\ \frac{5}{2}, & x=-3,\\ \frac{3}{2}, & x=3. \end{cases}$$

(iii) Zeigen Sie mithilfe des Zwischenwertsatzes, dass die folgende Gleichung eine Lösung $x>0$ besitzt:

$$E(\cos(x)) - x^7 = \sin(x^3).$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 30:

(i) (a) *Behauptung:* Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin(x)}{x} = 0$.

Beweis: Es sei (x_n) eine Folge in $(0,\infty)$, die für $n\to\infty$ gegen ∞ divergiert. Dann gilt

$$0 \le \left|\frac{\sin(x_n)}{x_n}\right| = \frac{|\sin(x_n)|}{|x_n|} \le \frac{1}{x_n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Mit dem Sandwich-Theorem folgt die Behauptung. □

(b) *Behauptung:* Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{23}\left(\left(1+\frac{23}{x}\right)^{23}-1\right) = 23$.

Beweis: Es sei (x_n) eine Folge in $(0,\infty)$, die für $n\to\infty$ gegen ∞ divergiert. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{x_n}{23}\left(\left(1+\frac{23}{x_n}\right)^{23}-1\right) &= \frac{x_n}{23}\left(\left(\sum_{k=0}^{23}\binom{23}{k}\left(\frac{23}{x_n}\right)^k 1^{23-k}\right)-1\right) = \sum_{k=1}^{23}\binom{23}{k}\left(\frac{23}{x_n}\right)^{k-1}\\ &= \binom{23}{1}\cdot\left(\frac{23}{x_n}\right)^0 + \sum_{k=2}^{23}\binom{23}{k}\left(\frac{23}{x_n}\right)^{k-1} \xrightarrow{n\to\infty} 23 + \sum_{k=2}^{23}\binom{23}{k}\cdot 0 = 23.\end{aligned}$$

□

(c) *Behauptung:* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{E(x)}{x}$ existiert nicht.

Beweis: Wir betrachten die Folgen (x_n) und (y_n) definiert durch $x_n := \frac{1}{n}$, $y_n := -\frac{1}{n}$ $(n\in\mathbb{N})$. Dann gelten $x_n\to 0$ und $y_n\to 0$ für $n\to\infty$. Weiter gelten

$$\frac{E(x_n)}{x_n} = n\cdot E\left(\frac{1}{n}\right) \ge n\cdot 1 \xrightarrow{n\to\infty} \infty,$$

und

$$\frac{E(y_n)}{y_n} = -n\cdot E\left(-\frac{1}{n}\right) = -n\cdot E\left(\frac{1}{n}\right)^{-1} \le -n\cdot\frac{1}{\mathrm{e}} \xrightarrow{n\to\infty} -\infty,$$

woraus die Behauptung folgt. □

(d) *Behauptung:* Es gilt $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2(x^2+1)(x^2-4)}{|x|^3} = \infty$

Beweis: Es sei (x_n) eine Folge in $(-\infty, 0)$, die gegen $-\infty$ divergiert für $n \to \infty$. Dann gilt

$$\frac{2\left(x_n^2+1\right)\left(x_n^2-4\right)}{|x_n|^3} = \frac{2x_n^4\left(1+\frac{1}{x_n^2}\right)\left(1-\frac{4}{x_n^2}\right)}{-x_n^3} = (-x_n) \cdot 2\left(1+\frac{1}{x_n^2}\right)\left(1-\frac{4}{x_n^2}\right).$$

Da $2\left(1+\frac{1}{x_n^2}\right)\left(1-\frac{4}{x_n^2}\right) \to 2$ für $n \to \infty$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt:

$$\left|2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{4}{x^2}\right)-2\right| < 1 \iff 2\left(1+\frac{1}{x_n^2}\right)\left(1-\frac{4}{x_n^2}\right) \in (1,3).$$

Damit folgt für alle $n \geq n_0$:

$$\frac{2(x_n^2+1)(x_n^2-4)}{|x_n|^3} \geq -x_n \cdot 1 \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

□

(ii) *Behauptung:* f ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ und unstetig in -3.

Beweis: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$, d.h. $x^2 - 9$ hat keine Nullstelle in $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$. Daher ist f auf $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ als Quotient zweier Polynome stetig. Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ gilt

$$\frac{x^3-3x^2}{x^2-9} = \frac{x^2(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{x^2}{x+3}.$$

Ebenfalls weil Quotienten von Polynomen stetig sind, gilt

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2}{x+3} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = f(3),$$

somit ist f stetig in 3. Definiere die Folge (x_n) durch $x_n := -3+\frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $x_n \to -3$ für $n \to \infty$. Wegen $x_n^2 \to 9 \neq 0$ und $x_n + 3 \to 0$ für $n \to \infty$ divergiert die Folge $f(x_n) = \frac{x_n^2}{x_n+3}$. Daher ist f nicht stetig in -3. □

(iii) *Behauptung:* Die gegebene Gleichung besitzt eine Lösung $x > 0$.

Beweis: Die Funktion $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := E(\cos(x)) - x^7 - \sin(x^3)$ ist als Komposition stetiger Funktionen stetig. Ferner ist

$$f(0) = E(1) - 0 - \sin(0) = \mathrm{e} > 0$$

und

$$f(2) = E(\cos(2)) - 2^7 - \sin(2^3) \leq E(1) - 128 + 1 < 4 - 128 = -124 < 0,$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass die Exponentialfunktion monoton wachsend ist. Nach dem Zwischenwertsatz existiert somit ein $\hat{x} \in (0, 2)$ mit $f(\hat{x}) = 0$, d.h. es gilt $E(\cos(\hat{x})) - \hat{x}^7 = \sin(\hat{x}^3)$. □

Aufgabe 31:

(i) Wie müssen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die Funktion $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sqrt{\frac{1}{x}+1}-\sqrt{x+1}}{x-1}, & \text{für } x > 1, \\ \beta, & \text{für } x = 1, \\ \alpha\frac{x^3-x^2+2x-2}{x-1}, & \text{für } 0 < x < 1, \end{cases}$$

auf $(0, \infty)$ stetig ist?

(ii) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(0) = 1$ und $f(x+y) \le f(x)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie die Äquivalenz

$$f \text{ ist stetig} \iff f \text{ ist stetig in } 0.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 31:

(i) *Behauptung:* Mit $\alpha = \frac{-1}{3\sqrt{2}}$ und $\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ wird die Funktion f stetig auf $(0, \infty)$.

Beweis: Als Verkettung stetiger Funktionen ist $x \mapsto \frac{\sqrt{\frac{1}{x}+1} - \sqrt{x+1}}{x-1}$ stetig für $x > 1$ und genauso ist $x \mapsto \alpha \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x-1}$ stetig auf $(0,1)$. Damit f auch in $x = 1$ stetig ist, muss gelten:

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = f(1) = \beta = \lim_{x \to 1-} f(x).$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1+} f(x) &= \lim_{x \to 1+} \frac{\sqrt{\frac{1}{x}+1} - \sqrt{x+1}}{x-1} = \lim_{x \to 1+} \frac{\frac{1}{x} + 1 - (x+1)}{(x-1)\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1} + \sqrt{x+1}\right)} \\
&= \lim_{x \to 1+} \frac{1 - x^2}{x(x-1)\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1} + \sqrt{x+1}\right)} = \lim_{x \to 1+} \frac{-(1+x)}{x\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1} + \sqrt{x+1}\right)} \\
&= \frac{-2}{1 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{2})} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1-} f(x) &= \lim_{x \to 1-} \alpha \cdot \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x-1} = \alpha \cdot \lim_{x \to 1-} \frac{(x-1)(x^2+2)}{x-1} \\
&= \alpha \cdot \lim_{x \to 1+} (x^2 + 2) = \alpha \cdot 3.
\end{aligned}$$

Somit muss gelten

$$3\alpha \overset{!}{=} -\frac{1}{\sqrt{2}} \iff \alpha = -\frac{1}{3\sqrt{2}}$$

und

$$\beta = f(1) \overset{!}{=} -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

was die Behauptung beweist. $\square$

(ii) *Voraussetzung:* Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(0) = 1$ und $f(x+y) \le f(x)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Behauptung: Es gilt die Äquivalenz

$$f \text{ ist stetig} \iff f \text{ ist stetig in } 0.$$

Beweis: $\Rightarrow$: Wenn f stetig ist, so ist f insbesondere stetig in 0.

$\Leftarrow$: Es sei nun umgekehrt f stetig in 0. Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und (x_n) eine reelle Folge mit $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$. Setze $y_n := x_n - x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus der Ungleichung folgt

$$f(x_n) = f(y_n + x_0) \le f(y_n) f(x_0)$$

und

$$f(x_0) = f(x_n + (-y_n)) \le f(x_n) f(-y_n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $y_n \to 0$ (und damit auch $-y_n \to 0$) für $n \to \infty$ und $f(0) = 1$ folgt aus der Stetigkeit von f in 0, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(-y_n) = f(0) = 1$ gilt. Somit ist $f(-y_n) > 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Daher erhalten wir aus den obigen beiden Abschätzungen die Ungleichung

$$(*) \qquad \frac{f(x_0)}{f(-y_n)} \le f(x_n) \le f(y_n)f(x_0)$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem gilt ferner

$$\frac{f(x_0)}{f(-y_n)} \to f(x_0) \quad \text{und} \quad f(y_n)f(x_0) \to f(x_0)$$

für $n \to \infty$. Mit dem Sandwichprinzip folgt aus $(*)$ die Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0),$$

d.h. f ist stetig in x_0. Da $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig war ist f stetig. $\square$

Aufgabe 32:

(i) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die folgende Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist.

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^2-x}{x^2-5x+4}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}, \\ \frac{3x-10}{x+2}, & x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(ii) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f in jedem $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ unstetig ist.

(b) Begründen Sie, dass f in 0 stetig ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 32:

(i) *Behauptung:* f ist stetig auf $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \cup \{2, 10\}$ und unstetig auf $\mathbb{N} \setminus \{2, 10\}$.

Beweis: An der Faktorisierung $x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$ erkennt man, dass $x^2 - 5x + 4$ keine Nullstelle in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ hat. Somit ist f auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ als ein Quotient zweier Polynome stetig. Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{x^2 - x}{x^2 - 5x + 4} = \frac{x(x-1)}{(x-4)(x-1)} = \frac{x}{x-4}.$$

Wir betrachten die Folge (x_n) definiert durch $x_n := 4 + \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $x_n \to 4$ und $x_n - 4 \to 0$ für $n \to \infty$ folgt die Divergenz von

$$f(x_n) = \frac{x_n}{x_n - 4},$$

somit ist f nicht stetig in 4. Es sei nun $y \in \mathbb{N} \setminus \{4\}$. Für jede Folge (y_n) mit $y_n \to y$ für $n \to \infty$ gilt $y_n \neq 4$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{y_n - 4} = \frac{y}{y-4} \quad \text{und} \quad f(y) = \frac{3y-10}{y+2},$$

f ist also genau dann stetig in y, wenn

$$\frac{y}{y-4} = \frac{3y-10}{y+2}$$

erfüllt ist. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{y}{y-4} = \frac{3y-10}{y+2} &\iff y(y+2) = (3y-10)(y-4) \\ &\iff y^2 + 2y = 3y^2 - 22y + 40 \\ &\iff 2y^2 - 24y + 40 = 0 \\ &\iff (y-2)(y-10) = 0,\end{aligned}$$

f ist daher stetig in 2 und 10 und unstetig in $\mathbb{N}\setminus\{2,10\}$. Insgesamt ist f also stetig auf $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{N})\cup\{2,10\}$ und unstetig auf $\mathbb{N}\setminus\{2,10\}$. □

(ii) (a) *Behauptung:* f ist in jedem $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ unstetig.

Beweis: Wir zeigen, dass f weder auf $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$, noch auf $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ stetig ist.

Es sei $x_0 \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $x_n := x_0 + \frac{\sqrt{2}}{n}$. Wegen $\sqrt{2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ist $x_n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter gilt $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$ und $f(x_n) = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0 \neq x_0 = f(x_0)$. Infolgedessen ist f nicht stetig in x_0. Da $x_0 \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ beliebig war, ist f nicht stetig auf $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$.

Sei nun $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Wie wir aus der Vorlesung wissen, gibt es eine Folge (q_n) rationaler Zahlen mit $q_n \to x_0$ für $n \to \infty$. Dann gilt $f(q_n) = q_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 \neq 0 = f(x_0)$. Infolgedessen ist f nicht stetig in x_0. Da $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ beliebig war, ist f nicht stetig auf $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. □

(b) *Behauptung:* f ist in 0 stetig.

Beweis: Wir setzen $x_0 := 0$. Wegen $x_0 \in \mathbb{Q}$ gilt $f(x_0) = x_0 = 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir müssen zeigen, dass es ein $\delta > 0$ gibt, sodass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| = |x| < \delta$ gilt. Für $\delta = \varepsilon > 0$ folgt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \delta$:

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x)| = \left\{\begin{array}{cl} |x| & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{array}\right\} \leq |x| < \delta = \varepsilon.$$

□