

9. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2022/23

23. Dezember 2022

Abgabe bis 13. Januar 2023, 13:00 Uhr

Aufgabe 33:

- (i) Untersuchen Sie (durch Beweis oder Gegenbeispiel), ob die folgenden Aussagen für alle stetigen Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und für alle Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ gelten:
- (i) A abgeschlossen $\implies f(A)$ abgeschlossen.
 - (ii) B abgeschlossen $\implies f^{-1}(B)$ abgeschlossen.
 - (iii) A beschränkt $\implies f(A)$ beschränkt.
 - (iv) B beschränkt $\implies f^{-1}(B)$ beschränkt.
- (ii) Es sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass D genau dann kompakt ist, wenn jede stetige Funktion auf D beschränkt ist.

Aufgabe 34:

- (i) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ sei stetig. Zeigen Sie, dass f einen *Fixpunkt* besitzt, d.h. es existiert ein $\hat{x} \in [a, b]$ mit $f(\hat{x}) = \hat{x}$. Gilt diese Aussage auch, wenn das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ durch ein beliebiges Intervall ersetzt wird?
- (ii) Gegeben sei die Funktion

$$f: [0, 1] \cup (2, 3] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x, & x \in [0, 1], \\ x - 1, & x \in (2, 3]. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} und zeigen Sie, dass diese nicht stetig ist, obwohl die Funktion f selbst stetig ist.

Aufgabe 35 (K):

- (i) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ jeweils auf gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitzstetigkeit.
- (a) $D = [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$,
 - (b) $D = (0, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$,
 - (c) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1 + x^4}$,
 - (d) $D = (0, \infty)$, $f(x) = \log(x)$.
- (ii) Zeigen Sie, dass eine Funktion $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist. Ist eine Funktion $h: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ ebenfalls gleichmäßig stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 36:

- (i) Es sei $\alpha > 0$. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:
- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha}$,
 - (b) $\lim_{x \rightarrow 0+} x^\alpha \log(x)$,
 - (c) $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x$.
- (ii) Zeigen Sie mithilfe des Zwischenwertsatzes, dass die folgenden Gleichungen jeweils eine Lösung $x > 0$ besitzen:
- (a) $x - \log(1 + x^2) = 100$,
 - (b) $3^x - x^3 - 3 = 0$.

Informationen

Alle weiteren Informationen bezüglich der Themen **Übungsbetrieb**, **Scheinkriterien**, **Tutorien**, **Prüfung**, **Skript** und **Literaturhinweise** finden Sie auf der ILIAS-Seite der Vorlesung.

https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_1896358&client_id=produktiv

Übungsschein

Jede (K)-Aufgabe wird mit maximal 10 Punkten bewertet. Einen Übungsschein erhält, wer auf den Übungsblättern 1-7 und 8-14 **jeweils** mindestens 35 Punkte (50 % der möglichen Punktzahl) erzielt. Notwendig für den Erhalt des Übungsscheins ist eine Anmeldung im CAS-Portal. Diese ist ab sofort und noch bis zum **19.02.2023** möglich.