Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

Lösungsvorschlag zum 9. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2022/23

13. Januar 2023

Aufgabe 33:

(i) Untersuchen Sie (durch Beweis oder Gegenbeispiel), ob die folgenden Aussagen für alle stetigen Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und für alle Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ gelten:

(a) A abgeschlossen $\implies$ $f(A)$ abgeschlossen.

(b) B abgeschlossen $\implies$ $f^{-1}(B)$ abgeschlossen.

(c) A beschränkt $\implies$ $f(A)$ beschränkt.

(d) B beschränkt $\implies$ $f^{-1}(B)$ beschränkt.

(ii) Es sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass D genau dann kompakt ist, wenn jede stetige Funktion auf D beschränkt ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 33:

(i) (a) *Behauptung:* Für abgeschlossene Mengen A gilt im Allgemeinen nicht, dass $f(A)$ abgeschlossen ist.

Beweis: Wir betrachten $A := \mathbb{R}$ und $f := E$ (die Exponentialfunktion). Dann sind A abgeschlossen und f stetig, aber $f(A) = (0, \infty)$ ist nicht abgeschlossen. $\square$

(b) *Behauptung:* Ist B abgeschlossen, so ist auch stets $f^{-1}(B)$ abgeschlossen.

Beweis: Es sei B abgeschlossen. Weiter sei (a_n) eine Folge in $f^{-1}(B)$, die gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert. Es gilt zu zeigen, dass der Grenzwert a auch in $f^{-1}(B)$ liegt.

Da f stetig ist, konvergiert die Folge der Bilder $(b_n) := (f(a_n))_{n=1}^{\infty}$ gegen $b := f(a)$ für $n \to \infty$. Wegen $a_n \in f^{-1}(B)$ gilt $b_n \in B$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da B abgeschlossen ist, liegt auch der Grenzwert b in B, d.h. $a \in f^{-1}(B)$. $\square$

(c) *Behauptung:* Ist A beschränkt, so ist $f(A)$ auch beschränkt.

Beweis: Es sei A beschränkt. Dann ist die Menge A enthalten im Intervall $[-C, C]$ für hinreichend großes $C > 0$. Dies ist ein abgeschlossenes beschränktes Intervall, und damit nach Satz 7.10 kompakt. Satz 7.11 besagt, dass auch das Bild $f([-C, C])$ kompakt, und insbesondere beschränkt ist. Das Bild $f(A)$ ist als Teilmenge von $f([-C, C])$ auch beschränkt.

Bemerkung: Hier haben wir verwendet, dass auch die abgeschlossene Menge $[-C, C]$ im Definitionsbereich von f liegt. Es genügt hier nicht, Funktionen zu betrachten, die nur auf A definiert sind. Zum Beispiel ist die Menge $(0, 1]$ beschränkt, deren Bild unter $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ aber nicht. $\square$

(d) *Behauptung:* Ist B beschränkt, so ist $f^{-1}(B)$ im Allgemeinen nicht beschränkt.

Beweis: Wir betrachten $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 0$ und $B = \{0\}$. Dann ist f stetig, B ist abgeschlossen, aber $f^{-1}(B) = \mathbb{R}$ ist unbeschränkt. $\square$

(ii) *Behauptung:* D ist genau dann kompakt, wenn jede stetige Funktion auf D beschränkt ist.

Beweis: " $\Longrightarrow$ ": Es seien D kompakt und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Nach Satz 7.11 ist $f(D)$ ebenfalls kompakt. Insbesondere ist $f(D)$ beschränkt, d.h. f ist beschränkt.

" $\Longleftarrow$ ": Es sei nun jede stetige Funktion auf D beschränkt. Insbesondere ist also die stetige Funktion $\mathrm{id}_D\colon D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ auf D beschränkt. Also ist $D = \mathrm{id}_D(D)$ nach Voraussetzung beschränkt. Auf Grund von Satz 7.10 (b) bleibt noch zu zeigen, dass D abgeschlossen ist.

Angenommen, D ist nicht abgeschlossen. Dann existieren eine Folge (x_n) in D und ein $x_0 \in \mathbb{R} \setminus D$ mit $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$. Wir definieren die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{|x-x_0|}$. Dann ist f stetig, denn die Betragsfunktion ist stetig und es gilt $x_0 \notin D$. Zudem gilt $f(x_n) = \frac{1}{|x_n-x_0|} \to \infty$ für $n \to \infty$, also ist f unbeschränkt, ein Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist D beschränkt und abgeschlossen, und somit nach Satz 7.10 (b) kompakt. $\square$

Aufgabe 34:

(i) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \le b$ und $f\colon [a,b] \to [a,b]$ sei stetig. Zeigen Sie, dass f einen *Fixpunkt* besitzt, d.h. es existiert ein $\hat{x} \in [a,b]$ mit $f(\hat{x}) = \hat{x}$. Gilt diese Aussage auch, wenn das abgeschlossene Intervall $[a,b]$ durch ein beliebiges Intervall ersetzt wird?

(ii) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon [0,1] \cup (2,3] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x, & x \in [0,1], \\ x-1, & x \in (2,3]. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} und zeigen Sie, dass diese nicht stetig ist, obwohl die Funktion f selbst stetig ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 34:

(i) *Voraussetzung:* Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \le b$ und $f\colon [a,b] \to [a,b]$ sei stetig.
Behauptung: Dann existiert ein $\hat{x} \in [a,b]$ mit $f(\hat{x}) = \hat{x}$.

Beweis: Definiere die Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) := f(x) - x$. Dann ist g stetig als Komposition stetiger Funktionen und es gilt:

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - a \ge a - a = 0, \\ g(b) &= f(b) - b \le b - b = 0. \end{aligned}$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $\hat{x} \in [a,b]$ mit $0 = g(\hat{x}) = f(\hat{x}) - \hat{x}$, d.h. $f(\hat{x}) = \hat{x}$.

Diese Aussage ist falsch, falls $[a,b]$ durch ein anderes, z.B. ein offenes Intervall ersetzt wird. Die Funktion $f\colon (0,1) \to (0,1)$, $x \mapsto x^2$ hat keinen Fixpunkt (die Fixpunkte wären auf dem Rand des Intervalls). $\square$

(ii) *Behauptung:* Die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon [0,2] \to [0,1] \cup (2,3]$ ist gegeben durch

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y, & y \in [0,1], \\ y+1, & y \in (1,2]. \end{cases}$$

f^{-1} ist aber nicht stetig in 1.

Beweis: f^{-1} ist als Polynom stetig auf $[0,1)$ und auf $(1,2]$, aber nicht stetig in 1, denn es gilt:

$$\lim_{y \to 1-} f^{-1}(y) = 1 \ne 2 = \lim_{y \to 1+} f^{-1}(y).$$

$\square$

Aufgabe 35 (K):

(i) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$ jeweils auf gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitzstetigkeit.

(a) $D = [0,\infty),\ f(x) = \sqrt{x}$,

(b) $D = (0,\infty),\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$,

(c) $D = \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$,

(d) $D = (0,\infty),\ f(x) = \log(x)$.

(ii) Zeigen Sie, dass eine Funktion $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist. Ist eine Funktion $h\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ ebenfalls gleichmäßig stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 35:

(i) (a) *Behauptung:* Die Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig.

Beweis: Zu zeigen ist:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x,y \in [0,\infty)\colon |x-y| < \delta \Rightarrow \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| < \varepsilon.$$

Es sei $\varepsilon > 0$. Definiere $\delta := \varepsilon^2 > 0$. Es gilt zunächst für alle $x, y \in [0,\infty)$:

$$|x-y| \le |x| + |y| = x + y \le x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2,$$

d.h. es gilt

$$(*) \qquad \sqrt{|x-y|} \le \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Es seien nun $x, y \in [0,\infty)$ mit $|x-y| < \delta$. Dann gilt mit $(*)$

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| = \left|\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \le \sqrt{|x-y|} < \sqrt{\delta} = \varepsilon.$$

Als nächstes zeigen wir: $\forall L \ge 0 \exists x, y \in [0,\infty)\colon |f(x) - f(y)| > L|x-y|$.
Es sei $L \ge 0$ beliebig, setze $x := 0$ und $y := \frac{1}{(L+1)^2} \in [0,\infty)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left|\sqrt{0} - \sqrt{\frac{1}{(L+1)^2}}\right| = \frac{1}{L+1} = (L+1)\cdot\frac{1}{(L+1)^2} \\ &= (L+1)\cdot|x-y| > L|x-y|, \end{aligned}$$

d.h. f ist nicht Lipschitz-stetig. □

(b) *Behauptung:* Die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}$ ist nicht gleichmäßig stetig und somit auch nicht Lipschitz-stetig.

Beweis: Zu zeigen ist:

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x, y \in (0,\infty)\colon |x-y| < \delta \text{ und } \left|\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right| \ge \varepsilon.$$

Setze $\varepsilon := 1$ und sei $\delta > 0$. Definiere $y := \delta$ und $x := \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)^{-2}$. Dann gilt $0 < x < y = \delta$, also $|x-y| = \delta - x < \delta$. Weiter gilt $\frac{1}{\sqrt{x}} \ge 1 + \frac{1}{\sqrt{y}} > \frac{1}{\sqrt{y}}$ und damit

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right| = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \ge 1 + \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{y}} = 1 = \varepsilon.$$

□

(c) *Behauptung:* Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \frac{1}{1+x^4}$ ist Lipschitz-stetig und damit auch gleichmäßig stetig.

Beweis: Wir zeigen, dass f Lipschitz-stetig. ist. Dann ist f insbesondere gleichmäßig stetig. Für $z \in \mathbb{R}$ und $p \in \mathbb{N}$ mit $p \leq 4$ gilt $\frac{|z|^p}{1+z^4} \leq 1$, denn ist $|z| \leq 1$ so gilt $|z|^p \leq 1 \leq 1 + z^4$, also $\frac{|z|^p}{1+z^4} \leq 1$. Ist andernfalls $|z| > 1$ so gilt $|z|^p \leq z^4$ und damit $|z^p| \leq 1 + z^4$, also gilt ebenfalls $\frac{|z|^p}{1+z^4} \leq 1$.
Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= \left| \frac{1}{1+x^4} - \frac{1}{1+y^4} \right| = \left| \frac{x^4 - y^4}{(1+x^4)(1+y^4)} \right| \\
&= \left| \frac{(x^2+y^2)(x+y)(x-y)}{(1+x^4)(1+y^4)} \right| = \left| \frac{(x^2+y^2)(x+y)}{(1+x^4)(1+y^4)} \right| |x-y| \\
&\leq \left(\left| \frac{x^3}{(1+x^4)(1+y^4)} \right| + \left| \frac{x^2 y}{(1+x^4)(1+y^4)} \right| \right. \\
&\qquad \left. + \left| \frac{x y^2}{(1+x^4)(1+y^4)} \right| + \left| \frac{y^3}{(1+x^4)(1+y^4)} \right| \right) |x-y| \\
&\leq 4|x-y|,
\end{aligned}$$

d.h. f ist Lipschitz-stetig mit Konstante $L = 4$. □

(d) *Behauptung:* Die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) := \log(x)$ ist nicht gleichmäßig stetig und somit auch nicht Lipschitz-stetig.

Beweis: Zu zeigen ist:

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x, y \in (0,\infty)\colon |x-y| < \delta \text{ und } |\log(x) - \log(y)| \geq \varepsilon.$$

Setze $\varepsilon := 1$ und sei $\delta > 0$. Wähle $x = \delta$ und $y = \frac{\delta}{\mathrm{e}}$. Dann gilt $|x - y| = \left|\delta\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)\right| < \delta$. Zudem gilt

$$|f(x) - f(y)| = |\log(x) - \log(y)| = \left| \log(\delta) - \log\left(\frac{\delta}{\mathrm{e}}\right) \right| = |\log(\delta) - (\log(\delta) - \underbrace{\log(\mathrm{e})}_{=1})| = 1 = \varepsilon.$$

□

(ii) *Behauptung:* Eine Funktion $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig.

Beweis: Es sei $\varepsilon > 0$. Wähle etwa $\delta = \frac{1}{2}$. Es seien nun $x, y \in \mathbb{N}$ mit $|x - y| < \delta = \frac{1}{2}$. Dann gilt $x = y$ und somit $|g(x) - g(y)| = 0 < \varepsilon$. □

Behauptung: Eine Funktion $h\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ muss nicht gleichmäßig stetig sein.

Beweis: Gegenbeispiel: Wir betrachten

$$h\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R},\ h(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Für die Folgen (x_n) und (y_n) definiert durch $x_n := \frac{1}{n}$ bzw. $y_n := \frac{1}{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$ gilt dann $x_n - y_n \to 0$ $(n \to \infty)$, aber $h(x_n) - h(y_n) = n - (n-1) = 1$ konvergiert nicht gegen 0, d.h. h ist nicht gleichmäßig stetig. □

Aufgabe 36:

(i) Es sei $\alpha > 0$. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x^\alpha \log(x)$, (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x^x$.

(ii) Zeigen Sie mithilfe des Zwischenwertsatzes, dass die folgenden Gleichungen jeweils eine Lösung $x > 0$ besitzen:

(a) $x - \log(1 + x^2) = 100$, (b) $3^x - x^3 - 3 = 0$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 36:

(i) *Voraussetzung:* Es sei $\alpha > 0$.

(a) *Behauptung:* Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = 0$.

Beweis: Es gilt nach Aussage 6.5

$$\frac{y}{\mathrm{e}^{\alpha y}} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha y}{\mathrm{e}^{\alpha y}} \xrightarrow{y\to\infty} \frac{1}{\alpha} \cdot 0 = 0.$$

Da $y = \log(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$, folgt mit der Substitution $y = \log(x)$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = \lim_{y\to\infty} \frac{y}{\mathrm{e}^{\alpha y}} = 0.$$

□

(b) *Behauptung:* Es gilt $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha \log(x) = 0$.

Beweis: Gemäß Aufgabenteil (a) gilt

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\log(y)}{y^\alpha} = 0.$$

Wegen $y = \frac{1}{x} \to \infty$ für $x \to 0+$ erhalten wir mit der Substitution $y = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to 0+} x^\alpha \log(x) = \lim_{y\to\infty} \left(\frac{1}{y}\right)^\alpha \log\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to\infty} \frac{-\log(y)}{y^\alpha} = 0.$$ □

(c) *Behauptung:* Es gilt $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = 1$.

Beweis: Für alle $x > 0$ gilt: $x^x = \mathrm{e}^{x\log(x)}$. Aus Aufgabenteil (b) folgt für $\alpha = 1$: $\lim\limits_{x\to 0+} x\log(x) = 0$. Mit der Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} \mathrm{e}^{x\log(x)} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

□

(ii) (a) *Behauptung:* Die Gleichung besitzt eine Lösung $x > 0$.

Beweis: Die Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) := x - \log(1+x^2) - 100$ ist stetig als Komposition stetiger Funktionen mit

$$f(0) = 0 - \log(1) - 100 = -100 < 0$$

und

$$\begin{aligned} f(1000) &= 1000 - \log(1 + 1000^2) - 100 > 900 - \log(10^7) = 900 - 7\log(10) \\ &> 900 - 7\log(\mathrm{e}^3) = 900 - 21\log(\mathrm{e}) = 900 - 21 = 879 > 0, \end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass der Logarithmus monoton wachsend ist. Nach dem Zwischenwertsatz existiert also ein $\hat{x} \in (0, 1000)$ mit $f(\hat{x}) = 0$, d.h. $\hat{x} - \log(1 + \hat{x}^2) = 100$. □

(b) Die Gleichung besitzt eine Lösung $x > 0$.

Beweis: Die Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3 + x^3 - 3^x$ ist als Komposition stetiger Funktionen stetig. Es gilt

$$\begin{aligned} f(0) &= 3 + 0^3 - 3^0 = 3 + 0 - 1 = 2 > 0, \\ f(4) &= 3 + 64 - 81 = -14 < 0. \end{aligned}$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $\hat{x} \in [0, 4]$ mit $f(\hat{x}) = 0$. Da $f(4) < 0 < f(0)$ ist $\hat{x} \in (0, 4)$, also insbesondere $\hat{x} > 0$. Dieses $\hat{x}$ löst die gegebene Gleichung. □