Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

Lösungsvorschlag zum 10. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2022/23

20. Januar 2023

Aufgabe 37:

(i) Es sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ und (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n \colon D \to \mathbb{R}$, welche punktweise auf D gegen eine Funktion $f \colon D \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie: (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen f auf D genau dann, wenn für jede Folge (x_n) in D gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (f_n(x_n) - f(x_n)) = 0.$$

(ii) Es sei $f_n \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ eine Folge monoton wachsender Funktionen mit

(a) $f_n(a) \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, (b) $\lim_{n\to\infty} f_n(b) = 0$.

Zeigen Sie, dass (f_n) dann gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen 0 konvergiert.

(iii) Untersuchen Sie die folgende Funktionenreihe auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx - n^2} \text{ für } x \in (0,1)$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 37:

(i) *Voraussetzung:* Es sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ und (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n \colon D \to \mathbb{R}$, welche punktweise auf D gegen eine Funktion $f \colon D \to \mathbb{R}$ konvergiert.

Behauptung: (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen f auf D genau dann, wenn für jede Folge (x_n) in D gilt

$$\lim_{n\to\infty} (f_n(x_n) - f(x_n)) = 0.$$

Beweis: $\Rightarrow$: Es sei also (f_n) gleichmäßig konvergent gegen f und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ und alle $x \in D$ gilt:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Folglich gilt dies auch für $x = x_n$.

$\Leftarrow$: Angenommen (f_n) ist nicht gleichmäßig konvergent gegen f. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, sodass es für jedes $N \in \mathbb{N}$ ein $n \geq N$ und ein $x(n) \in D$ gibt mit

$$|f_n(x(n)) - f(x(n))| \geq \varepsilon_0.$$

Definiere die Folge (x_n) durch $x_n := x(n)$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann konvergiert $f_n(x_n) - f(x_n)$ nicht gegen 0. $\square$

(ii) *Voraussetzung:* Es sei $f_n \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ eine Folge monoton wachsender Funktionen mit

(a) $f_n(a) \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, (b) $\lim_{n\to\infty} f_n(b) = 0$.

Behauptung: Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen 0.

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt wegen der Monotonie

$$0 \le f_n(a) \le f_n(x) \le f_n(b) \quad \text{für alle } x \in [a,b].$$

Es sei nun $\varepsilon > 0$. Wegen der Eigenschaft (b) existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $0 \le f_n(b) < \varepsilon$ für alle $n \ge n_0$. Wegen der Monotonie erhalten wir

$$\forall n \ge n_0 \ \forall x \in [a,b] \colon 0 \le f_n(x) \le f_n(b) < \varepsilon.$$

Somit gilt insgesamt

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \ge n_0 \ \forall x \in [a,b] \colon |f_n(x) - 0| < \varepsilon,$$

also konvergiert (f_n) auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen 0. □

(iii) *Behauptung:* Die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx-n^2}$ konvergiert auf $(0,1)$ punktweise und gleichmäßig.

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge 2$ und $x \in (0,1)$ gilt

$$\left| \frac{1}{nx-n^2} \right| = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-x} \le \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \le \frac{1}{(n-1)^2} =: a_n.$$

Setze $a_1 := 1$. Dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und es gilt $\left| \frac{1}{nx-n^2} \right| \le a_n$ für alle $n \ge 2$ und alle $x \in (0,1)$. Nach dem Kriterium von Weierstraß konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx-n^2}$ auf $(0,1)$ gleichmäßig, und daher insbesondere auch punktweise. □

Aufgabe 38 (K):

(i) Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen bzw. -reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls die Grenz- bzw. Summenfunktion an:

(a) $f_n \colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ f_n(x) := x\mathrm{e}^{-nx}$ $(n \in \mathbb{N})$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{(1+x^4)^n}$ für $x \in \mathbb{R}$,

(c) $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) := nx(1-x)^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

(ii) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die folgenden Funktionen $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind und berechnen Sie dort deren Ableitung.

(a) $f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \ne 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$

(b) $f(x) := (1+x^2)^x$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 38:

(i) (a) *Behauptung:* Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert gleichmäßig und insbesondere punktweise gegen die Funktion $f \colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) := 0$.

Beweis: Wir zeigen gleichmäßige Konvergenz, woraus sich dann auch die punktweise Konvergenz ergibt. Für alle $x \in [0,\infty)$ gilt

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ge x,$$

d.h. $\frac{x}{\mathrm{e}^x} \le 1$. Damit folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,\infty)$:

$$|f_n(x) - f(x)| = x\mathrm{e}^{-nx} = \frac{1}{n} \cdot \frac{nx}{\mathrm{e}^{nx}} \le \frac{1}{n}.$$

Wegen $\frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$ folgt die Behauptung. □

(b) *Behauptung:* Die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{(1+x^4)^n}$ konvergiert auf $\mathbb{R}$ punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \sin(x)\left(1 + \frac{1}{x^4}\right), & x \ne 0. \end{cases}$$

Beweis: Es sei $x \in \mathbb{R}$. Für $x = 0$ ergibt sich wegen $\sin(0) = 0$ direkt $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{(1+x^4)^n} = 0 = f(0)$. Für $x \neq 0$ ist die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^4}\right)^n$ konvergent und damit ergibt sich

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{(1+x^4)^n} = \sin(x) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^4}\right)^n = \sin(x) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^4}} = \sin(x) \cdot \frac{1+x^4}{1+x^4-1}$$
$$= \sin(x)\left(\frac{1}{x^4} + 1\right) =: f(x).$$

Somit konvergiert (f_n) punktweise gegen f.
Für $x \neq 0$ gilt $f(x) = \sin(x) + \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{x^3}$. Nach Vorlesung gilt $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, $\frac{1}{x^3}$ divergiert aber für $x \to 0$. Somit existiert der Grenzwert von $f(x)$ für $x \to 0$ nicht, insbesondere ist f in 0 nicht stetig. Damit kann die Konvergenz der stetigen Funktionen $s_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $s_k(x) := \sum_{n=0}^{k} \frac{\sin(x)}{(1+x^4)^n}$ $(k \in \mathbb{N})$ gegen f nicht gleichmäßig sein (vgl. Satz 8.3 b). □

(c) *Behauptung:* Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := 0$.

Beweis: Es gilt $f_n(0) = 0 \to 0$ für $n \to \infty$. Für $x \in (0,1]$ gilt $(1-x) \in [0,1)$ und damit folgt

$$\sqrt[n]{|nx(1-x)^n|} = \sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{x}(1-x) \xrightarrow{n\to\infty} 1 \cdot 1 \cdot (1-x) = 1-x < 1.$$

Nach dem Wurzelkriterium konvergiert daher die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(nx(1-x)^n)$ und somit ist die Folge $(nx(1-x)^n)$ eine Nullfolge. Somit ist die punktweise Konvergenz von (f_n) gegen die Nullfunktion gezeigt.
Weiter gilt für die Folge $(\frac{1}{n})$ in $[0,1]$:

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e}^{-1} \neq 0$$

für $n \to \infty$. Nach Aufgabe 37 (i) ist die Konvergenz daher nicht gleichmäßig. □

(ii) (a) *Behauptung:* f ist differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Beweis: Für alle $x \neq 0$ ist f als Verkettung differenzierbarer Funktionen differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Weiter gilt für $x \neq 0$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

und damit folgt

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| \leq |x|\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x| \xrightarrow{x\to 0} 0,$$

d.h. f ist differenzierbar in 0 und es gilt $f'(0) = 0$. □

(b) *Behauptung:* Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) = \left(\log(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2}\right)(1+x^2)^x.$$

Beweis: Es gilt

$$f(x) = \mathrm{e}^{x\log(1+x^2)}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Somit ist f als Verkettung differenzierbarer Funktionen differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x\log(1+x^2)}\left(\log(1+x^2) + x \cdot \frac{2x}{1+x^2}\right) = \left(\log(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2}\right)(1+x^2)^x.$$

□

Aufgabe 39:

(i) Es seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Die Funktion f sei stetig in 0 und g sei differenzierbar in 0 mit $g(0) = 0$. Zeigen Sie, dass das Produkt $g \cdot f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(g \cdot f)(x) := g(x)f(x)$ in 0 differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.

(ii) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, und berechnen Sie für diese x die Ableitung $f'(x)$:

$$f(x) := \begin{cases} x^4 - 2x^3 + x^2, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 39:

(i) *Voraussetzung:* Es seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, wobei f stetig in 0 ist und g differenzierbar in 0 ist mit $g(0) = 0$.

Behauptung: Das Produkt $\varphi := g \cdot f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) := (g \cdot f)(x) := g(x)f(x)$ ist in 0 differenzierbar mit Ableitung $\varphi'(0) = (g \cdot f)'(0) = f(0) \cdot g'(0)$.

Beweis: Für alle $h \neq 0$ gilt

$$\frac{\varphi(0+h) - \varphi(0)}{h} = \frac{g(h)f(h) - g(0)f(0)}{h} = \frac{g(h)f(h)}{h} = f(h) \cdot \frac{g(h) - g(0)}{h}.$$

Da f in 0 stetig ist, gilt $f(h) \to f(0)$ für $h \to 0$. Da g in 0 differenzierbar ist, gilt $\frac{g(h)-g(0)}{h} \to g'(0)$ für $h \to 0$. Insgesamt gilt also

$$\frac{\varphi(0+h) - \varphi(0)}{h} = f(h) \cdot \frac{g(h) - g(0)}{h} \xrightarrow{h \to 0} f(0) \cdot g'(0),$$

also ist φ nach Definition in 0 differenzierbar mit $\varphi'(0) = f(0) \cdot g'(0)$. □

(ii) *Behauptung:* f ist genau dann differenzierbar, wenn $x \in \{0, 1\}$. In diesem Fall gilt $f'(x) = 0$.

Beweis: Für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gilt $f(x) = x^2(x-1)^2$. Es sei zunächst $x \in \{0, 1\}$. Dann gilt $f(x) = 0$, also

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x+h)}{h}$$

für alle $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Folglich gilt

$$\left|\frac{f(x+h)}{h}\right| \leq \left|\frac{(x+h)^2(x+h-1)^2}{h}\right| = \left|(x+h)(x-1+h) \cdot \frac{(x+h)(x-1+h)}{h}\right|$$

für alle $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Somit gelten

$$\left|\frac{f(h) - f(0)}{h}\right| \leq \left|h(h-1) \cdot \frac{h(h-1)}{h}\right| = |h|(h-1)^2 \xrightarrow{h \to 0} 0$$

und

$$\left|\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\right| \leq \left|(1+h)h \cdot \frac{(1+h)h}{h}\right| = |h|(1+h)^2 \xrightarrow{h\to 0} 0,$$

d.h. f ist in diesen x differenzierbar mit $f'(x) = 0$.

Es sei nun $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Wir zeigen, dass f in x nicht stetig ist, somit kann f dort auch nicht differenzierbar sein.

<u>1. Fall:</u> Es sei $x \in \mathbb{Q}$. Dann gilt $f(x) = 0$. Wähle eine Folge (x_n) in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$. Dann gilt

$$f(x_n) = x_n^2(x_n-1)^2 \xrightarrow{n\to\infty} x^2(x-1)^2 \neq 0 = f(x),$$

also ist f nicht stetig in x.

<u>2. Fall:</u> Es sei $x \notin \mathbb{Q}$. Dann gilt $f(x) = x^2(x-1)^2 \neq 0$. Wähle eine Folge (x_n) in $\mathbb{Q}$ mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$. Dann gilt $f(x_n) = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0 \neq f(x)$, also ist f nicht stetig in x. $\square$

Aufgabe 40:

(i) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} x^\alpha \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x \leq 0, \end{cases}$$

in allen Punkten $x \in \mathbb{R}$, in denen diese existiert.

(ii) Es seien $\alpha > 0$ und die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|^\alpha$ gegeben. Zeigen Sie:

$$f \text{ ist in } 0 \text{ differenzierbar} \iff \alpha > 1.$$

(iii) Zeigen Sie, dass die im folgenden definierten Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind, und berechnen Sie für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Ableitung $f'(x)$:

(a) $f(x) := (x^4+1)\mathrm{e}^{x^3}$, (b) $f(x) := \left|x^2-4\right|^3$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 40:

(i) <u>*Voraussetzung:*</u> Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} x^\alpha \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$$

<u>*Behauptung:*</u> Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} x^\alpha \left(\frac{\alpha}{x} + \frac{2}{x^3}\right), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

<u>*Beweis:*</u> Für $x \neq 0$ ist f differenzierbar, da f auf $(-\infty, 0)$ identisch 0 ist und auf $(0,\infty)$ eine Verkettung differenzierbarer Funktionen ist. Es gilt also $f'(x) = 0$ für $x < 0$ und für $x > 0$ erhält man

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} + x^\alpha \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\left(\frac{2}{x^3}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} x^\alpha \left(\frac{\alpha}{x} + \frac{2}{x^3}\right).$$

Damit f in 0 differenzierbar ist, muss der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ existieren. Es gilt $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$. Weiter gilt

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0+} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Wir machen nun eine Fallunterscheidung:
Fall $\alpha > 1$*:* $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0+} x^{\alpha-1} \cdot \lim\limits_{x\to 0+} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = 0 \cdot 0 = 0.$
Fall $\alpha = 1$*:* $\lim\limits_{x\to 0+} x^{0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0+} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$
Fall $\alpha < 1$*:* Substituiere $t = \frac{1}{x^2}$, also $x = \frac{1}{\sqrt{t}}$. Dann gilt

$$\lim_{x\to 0+} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{t\to\infty} t^{-\frac{1}{2}(\alpha-1)}\mathrm{e}^{-t} = \lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}(1-\alpha)}\mathrm{e}^{-t} = 0,$$

wobei die letzte Gleichheit eine Folgerung aus dem Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^p} = \infty$ ($p \in \mathbb{N}_0$) und $\frac{1}{2}(1-\alpha) > 0$. Also existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{f(x)}{x}$ und ist 0, d.h. $f'(0) = 0$. □

(ii) *Behauptung:* f ist genau dann in 0 differenzierbar, wenn $\alpha > 1$ gilt.

Beweis: $\Longleftarrow$: Sei $\alpha > 1$. Es gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|^\alpha}{h} = 0.$$

Also ist f in 0 differenzierbar.
$\Longrightarrow$: Sei $0 < \alpha \leq 1$. Dann gilt

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} h^{\alpha-1} \begin{cases} = 1, & \alpha = 1 \\ \text{existiert nicht}, & \alpha < 1 \end{cases}$$

und

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-} -h^{\alpha-1} \begin{cases} = -1, & \alpha = 1 \\ \text{existiert nicht}, & \alpha < 1 \end{cases}$$

Also ist f nicht differenzierbar in 0. □

(iii) (a) *Behauptung:* Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = x^2(3+4x+3x^4)\mathrm{e}^{x^3}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis: Die Funktion ist als Verkettung differenzierbarer Funktionen differenzierbar. Mit der Produkt- und Kettenregel ergibt sich für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 4x^3\mathrm{e}^{x^3} + (x^4+1)\mathrm{e}^{x^3}3x^2 = x^2(3+4x+3x^4)\mathrm{e}^{x^3}.$$

□

(b) *Behauptung:* Die Funktion ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} 6x(x^2-4)^2, & x \in \mathbb{R} \setminus [-2,2], \\ -6x(x^2-4)^2, & x \in [-2,2]. \end{cases}$$

Beweis: Definiere die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := |x|^3$. Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist g als Polynom differenzierbar, in 0 ist g nach Aufgabenteil (ii) differenzierbar und für die Ableitung gilt $g'(x) = 3x|x|$ ($x \in \mathbb{R}$). Somit ist f als Verkettung differenzierbarer Funktionen differenzierbar. Mit der Kettenregel folgt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 3(x^2-4)\left|x^2-4\right| \cdot 2x = 6x(x^2-4)\left|x^2-4\right|.$$

Für $x \in [-2,2]$ ergibt sich $f'(x) = -6x(x^2-4)^2$, für $x \in \mathbb{R} \setminus [-2,2]$ erhält man hingegen $f'(x) = 6x(x^2-4)^2$. □