Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

11. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2022/23

20. Januar 2023

Abgabe bis 27. Januar 2023, 13:00 Uhr

Aufgabe 41:

(i) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen der Funktion $f\colon [-1,9] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} x^5, & x \in [-1,1), \\ 2-(x-2)^2, & x \in [1,3), \\ 3x-8, & x \in [3,4], \\ \frac{12}{x}, & x \in (4,9]. \end{cases}$$

(ii) Zeigen Sie, dass für alle $y > x > 0$ die folgende Ungleichung gilt:

$$y \log y - x \log x \leq (y-x)(1+\log y).$$

Aufgabe 42 (K):

(i) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x))}{x}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sin(\sqrt{x}) - \sin(\sqrt{x+1})$, (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1-x+\log(x)}$.

(ii) Es sei $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ definiert durch $f(x) := (x^{\frac{1}{3}} + x)\sqrt{x}$. Zeigen Sie, dass f bijektiv ist und berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in 544, d.h. $(f^{-1})'(544)$. *Hinweis:* Verwenden Sie, dass $f(64) = 544$.

(iii) Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := (1+x^2)\arctan(x)$ Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante $L = \pi + 1$.

Aufgabe 43:
Wir betrachten wieder die Potenzreihen Sinus hyperbolicus und Cosinus hyperbolicus,

$$\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

für $x \in \mathbb{R}$, mit Konvergenzradius ∞.

(i) Bestimmen Sie die Ableitungen von sinh und cosh.

(ii) Zeigen Sie, dass sinh auf $\mathbb{R}$ streng monoton wächst und dass $\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ gilt.

(iii) Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktion Areasinus hyperbolicus $\operatorname{arsinh} := \sinh^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und zeigen Sie $\operatorname{arsinh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ für $y \in \mathbb{R}$.

(iv) Zeigen Sie $\operatorname{arsinh}(y) = \log(y + \sqrt{y^2+1})$ für $y \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Nützliche Eigenschaften dieser Funktionen haben wir bereits auf Übungsblatt 7 kennengelernt.

Aufgabe 44:

(i) Beweisen Sie die folgende Ungleichung:

$$|\cos(\mathrm{e}^x) - \cos(\mathrm{e}^y)| \leq |x - y| \quad \text{für alle } x, y \leq 0.$$

(ii) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x\log(x)}{x^3 + 1}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x} - \frac{1}{\cosh(x)}\right)$.

Informationen

Alle weiteren Informationen bezüglich der Themen **Übungsbetrieb**, **Scheinkriterien**, **Tutorien**, **Prüfung**, **Skript** und **Literaturhinweise** finden Sie auf der ILIAS-Seite der Vorlesung.

`https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_1896358&client_id=produktiv`

Übungsschein

Jede (K)-Aufgabe wird mit maximal 10 Punkten bewertet. Einen Übungsschein erhält, wer auf den Übungsblättern 1-7 und 8-14 **jeweils** mindestens 35 Punkte (50 % der möglichen Punktzahl) erzielt. Notwendig für den Erhalt des Übungsscheins ist eine Anmeldung im CAS-Portal. Diese ist ab sofort und noch bis zum **19.02.2023** möglich.