Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

Lösungsvorschlag zum 11. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2022/23

27. Januar 2023

Aufgabe 41:

(i) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen der Funktion $f\colon [-1,9] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} x^5, & x \in [-1,1), \\ 2-(x-2)^2, & x \in [1,3), \\ 3x-8, & x \in [3,4], \\ \frac{12}{x}, & x \in (4,9]. \end{cases}$$

(ii) Zeigen Sie, dass für alle $y > x > 0$ die folgende Ungleichung gilt:

$$y \log y - x \log x \le (y-x)(1+\log y).$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 41:

(i) *Behauptung:* f besitzt für $x_0 \in \{-1,3,9\}$ ein lokales Minimum und für $x_0 \in \{2,4\}$ ein lokales Maximum, und keine weiteren lokalen Extrema.

Beweis: Es gilt $f(-1) = -1$ und $f'(x) = 5x^4$ für $x \in (-1,1)$. Daher gilt $f'(x) > 0$ für $x \in (-1,1) \setminus \{0\}$ sowie $f'(0) = 0$ und folglich ist f auf $[-1,1) \setminus \{0\}$ streng monoton wachsend. Also ist $f(-1) < f(x)$ für $x \in (-1,1)$ und damit hat f in $x_0 = -1$ ein lokales Minimum.

Es gilt $f(2) = 2$ und $f'(x) = 4-2x$ auf $(1,3)$. Daher gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in (1,2)$ und $f'(x) < 0$ für $x \in (2,3)$. Also ist f auf $(1,2)$ streng monoton wachsend und auf $(2,3)$ streng monoton fallend. Somit gilt $f(x) \le f(2)$ für $x \in (1,3)$ und folglich hat f in 2 ein lokales Maximum.

Es gilt $f(3) = 1$ und $f(x) = 3x-8 \ge 1$ für $x \in [3,4)$. Außerdem gilt $f(x) > 1$ auf $(1,3)$, denn für $x \in (1,3)$ ist $(x-2)^2 < 1$. Also hat f in $x_0 = 3$ ein lokales Minimum. Ferner gilt $f'(x) = 3$ für $x \in (3,4)$ und daher ist f dort streng monoton wachsend.

Es gilt $f(4) = 4$ und $f(x) < 4$ für $x \in (3,4)$. Außerdem gilt $f(x) < 3$ und somit insbesondere $f(x) < 4$ für alle $x \in (4,9)$. Also hat f in 4 ein lokales Maximum. Ferner ist $f'(x) = -\frac{12}{x^2} < 0$ für $x \in (4,9)$ und damit ist f dort streng monoton fallend.

Es gilt $f(9) = \frac{4}{3}$ und $f(x) > \frac{4}{3}$ für $x \in (4,9)$. Somit hat f in 9 ein lokales Minimum.

Wir müssen nun noch ausschließen, dass f weitere lokale Extrema besitzt: auf den Intervallen $(-1,0), (0,1), (1,2), (2,3), (3,4)$ und $(4,9)$ ist, wie wir oben gesehen haben, f jeweils entweder nur streng monoton fallend oder nur streng monoton wachsend. Dort kann also kein lokales Extremum von f existieren. Es sei $\delta \in (0,1)$. Dann gilt für alle $x < 0$ mit $|x| < \delta$, dass $f(x) = x^5 < 0$ und für alle $x > 0$ mit $|x| < \delta$, dass $f(x) = x^5 > 0$. Also hat f in 0 kein lokales Extremum. Für alle x mit $|x-1| < \delta$ und $x < 1$ gilt $f(x) = x^5 < 1$ und für alle x mit $|x-1| < \delta$ und $x > 1$ gilt $f(x) = 2-(x-2)^2 > 1$. Somit hat f in 1 ebenfalls kein lokales Extremum.

Das globale Maximum wird somit an der Stelle $x = 4$ angenommen, das globale Minimum an der Stelle $x = -1$. □

(ii) *Behauptung:* Für alle $y > x > 0$ gilt die Ungleichung

$$y \log y - x \log x \le (y-x)(1+\log y).$$

Beweis: Definiere $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch $f(t) := t \log t$. f ist als Produkt differenzierbarer Funktionen differenzierbar und mit der Produktregel erhält man $f'(t) = \log t + 1$ $(t \in (0,\infty))$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi \in (x,y)$ mit

$$f(y) - f(x) = (y-x) \cdot f'(\xi).$$

Da f' monoton wächst, gilt $f'(\xi) \leq f'(y)$ für alle $\xi \in (x,y)$. Zusammen mit $y - x > 0$ folgt

$$y \log y - x \log x = f(y) - f(x) \leq (y-x) \cdot f'(y) = (y-x)(1 + \log y).$$

□

Aufgabe 42 (K):

(i) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x))}{x}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sin(\sqrt{x}) - \sin(\sqrt{x+1})$, (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \log(x)}$.

(ii) Es sei $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ definiert durch $f(x) := (x^{\frac{1}{3}} + x)\sqrt{x}$. Zeigen Sie, dass f bijektiv ist und berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in 544, d.h. $(f^{-1})'(544)$. *Hinweis:* Verwenden Sie, dass $f(64) = 544$.

(iii) Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R},\ f(x) := (1 + x^2)\arctan(x)$ Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante $L = \pi + 1$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 42:

(i) (a) *Behauptung:* Es gilt $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x))}{x} = 1$.

Beweis: Wir setzen $f(x) := \sin(\sin(x))$ und $g(x) := x$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann sind f und g differenzierbar. Ferner existiert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (siehe unten) und es gilt

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0.$$

Damit erhalten wir nach den Regeln von de l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x))}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin(x)) \cdot \cos(x)}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

□

(b) *Behauptung:* Es gilt $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sin(\sqrt{x}) - \sin(\sqrt{x+1}) = 0$.

Beweis: Definiere $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R},\ z \mapsto \sin(\sqrt{z})$. f ist als Komposition von auf $[1,\infty)$ stetigen und auf $(1,\infty)$ differenzierbaren Funktionen ebenfalls auf $[1,\infty)$ stetig und auf $(1,\infty)$ differenzierbar. Es sei nun $x \in [1,\infty)$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in (x, x+1)$ mit

$$\sin(\sqrt{x}) - \sin(\sqrt{x+1}) = f(x) - f(x+1) = f'(\xi) \cdot (x - (x+1)) = -f'(\xi) = -\cos(\sqrt{\xi}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\xi}}.$$

Daraus folgt

$$\left|\sin(\sqrt{x}) - \sin(\sqrt{x+1})\right| = \left|\cos(\sqrt{\xi})\right| \cdot \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \leq 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x\to\infty} 0.$$

□

(c) *Behauptung:* Es gilt $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \log(x)} = -2$.

Beweis: Wir setzen $f(x) := x^x - x$ und $g(x) := 1 - x + \log(x)$ für $x > 0$. Es gilt $f(x) = \mathrm{e}^{\log(x^x)} = \mathrm{e}^{x\log(x)}$. Also sind f und g zweimal differenzierbar mit

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^x \cdot \left(\log(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) - 1 = x^x(\log(x)+1) - 1, \quad & g'(x) &= -1 + \frac{1}{x}, \\ f''(x) &= x^x(\log(x)+1)^2 + x^x \cdot \frac{1}{x}, & g''(x) &= -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Ferner existiert $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ (siehe unten) und es gilt

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} f'(x) = \lim_{x\to 1} g'(x) = 0.$$

Damit erhalten wir durch zweifaches Anwenden der Regeln von de l'Hospital:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \log(x)} &= \lim_{x\to 1} \frac{x^x(\log(x)+1) - 1}{-1 + \frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{x^x(\log(x)+1)^2 + x^x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1+1}{-1} = -2. \end{aligned}$$

□

(ii) *Voraussetzung:* Es sei $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ definiert durch $f(x) := (x^{\frac{1}{3}} + x)\sqrt{x}$.
Behauptung: Die Funktion f ist bijektiv und $(f^{-1})'(544) = \frac{12}{149}$.

Beweis: Als Verkettung differenzierbarer Funktionen ist f auf $(0,\infty)$ differenzierbar und es gilt für $x \in (0,\infty)$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 1\right)\sqrt{x} + \left(x^{\frac{1}{3}} + x\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Also gilt $f' > 0$ auf $(0,\infty)$ und somit ist f auf $(0,\infty)$ streng monoton wachsend nach Satz 9.10. Da f auf $[0,\infty)$ stetig ist, ist f damit auf $[0,\infty)$ injektiv. Es gilt $f(0) = 0$ und $f(x) \to \infty$ $(x \to \infty)$. Mit dem Zwischenwertsatz folgt $f([0,\infty)) = [0,\infty)$, d.h. f ist surjektiv. Insgesamt ist f also bijektiv.

Da $f(64) = \left(64^{\frac{1}{3}} + 64\right)\sqrt{64} = (4+64)8 = 544$ liefert der Satz 9.3 über die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(544) = \frac{1}{f'(64)} &= \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\cdot 64^{-\frac{2}{3}} + 1\right)\sqrt{64} + \left(64^{\frac{1}{3}} + 64\right)\frac{1}{2\sqrt{64}}} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{16} + 1\right)8 + (4+64)\cdot\frac{1}{2\cdot 8}} = \frac{1}{\frac{1}{6} + 8 + \frac{1}{4} + 4} = \frac{1}{\frac{2+3+144}{12}} = \frac{12}{149}. \end{aligned}$$

□

(iii) *Voraussetzung:* Es sei die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := (1+x^2)\arctan(x)$.
Behauptung: Die Funktion f ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = \pi + 1$.

Beweis: Als Produkt stetiger Funktionen ist f stetig. Weiter ist f als Verkettung differenzierbarer Funktionen differenzierbar auf $(-1,1)$. Es seien $x, y \in [-1,1]$, o.B.d.A. gilt $x < y$. Nach dem Mittelwertsatz (Satz 9.7) existiert ein $\xi \in (x,y)$ mit

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y-x).$$

Weiter berechnen wir

$$f'(x) = 2x\arctan(x) + (1+x^2)\cdot\frac{1}{1+x^2} = 2x\arctan(x) + 1,$$

somit gilt $|f'(x)| \le 2\cdot 1\cdot\frac{\pi}{2} + 1 = \pi + 1$ für alle $x \in [-1,1]$. Damit erhalten wir

$$|f(x) - f(y)| \le (\pi+1)|x-y|.$$

□

Aufgabe 43:
Wir betrachten wieder die Potenzreihen Sinus hyperbolicus und Cosinus hyperbolicus,

$$\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

für $x \in \mathbb{R}$, mit Konvergenzradius ∞.

(i) Bestimmen Sie die Ableitungen von sinh und cosh.

(ii) Zeigen Sie, dass sinh auf $\mathbb{R}$ streng monoton wächst und dass $\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ gilt.

(iii) Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktion Areasinus hyperbolicus $\operatorname{arsinh} := \sinh^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und zeigen Sie $\operatorname{arsinh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ für $y \in \mathbb{R}$.

(iv) Zeigen Sie $\operatorname{arsinh}(y) = \log(y + \sqrt{y^2+1})$ für $y \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Nützliche Eigenschaften dieser Funktionen haben wir bereits auf Übungsblatt 7 kennengelernt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 43:

(i) *Behauptung:* Die Funktionen sinh und cosh sind beliebig oft differenzierbar. Die erste Ableitung ist gegeben durch $\sinh' = \cosh$ bzw. $\cosh' = \sinh$.

Beweis. Nach Übungsblatt 7 gelten $\sinh(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$ sowie $\cosh(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$ für $x \in \mathbb{R}$. Für die Terme auf der rechten Seite ist bekannt, dass es sich um beliebig oft differenzierbare Funktionen handelt. Als Ableitung erhält man für $x \in \mathbb{R}$:

$$\sinh'(x) = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^x - \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} \cdot (-1) = \cosh(x),$$
$$\cosh'(x) = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^x + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} \cdot (-1) = \sinh(x)$$

Alternativ kann man die Ableitungen auch aus der Potenzreihe ablesen, z.B. ist

$$\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \rightsquigarrow \quad \sinh'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)x^{2k}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cosh(x)$$

für $x \in \mathbb{R}$. Die Ableitung von cosh kann man ähnlich berechnen. □

(ii) *Behauptung:* sinh wächst streng monoton und es gilt $\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Beweis: Wegen $\sinh'(x) = \cosh(x) \geq 1$ für $x \in \mathbb{R}$ ist sinh gemäß Satz 9.10 streng monoton wachsend. Weiter gelten

$$\sinh(x) = \frac{1}{2} \underbrace{\mathrm{e}^x}_{\substack{\to\infty \\ (x\to\infty)}} - \frac{1}{2} \underbrace{\mathrm{e}^{-x}}_{\substack{\to 0 \\ (x\to\infty)}} \to \infty \quad (x \to \infty),$$
$$\sinh(x) = \frac{1}{2} \underbrace{\mathrm{e}^x}_{\substack{\to 0 \\ (x\to-\infty)}} - \frac{1}{2} \underbrace{\mathrm{e}^{-x}}_{\substack{\to\infty \\ (x\to-\infty)}} \to -\infty \quad (x \to -\infty)$$

Da sinh als Potenzreihe stetig ist, nimmt sinh nach dem Zwischenwertsatz jede reelle Zahl als Wert an, d.h. $\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. □

(iii) *Behauptung:* Die Umkehrabbildung arsinh ist differenzierbar. Die Ableitung ist gegeben durch $\operatorname{arsinh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ für $y \in \mathbb{R}$.

Beweis: Aus Übungsblatt 7 wissen wir, dass $\cosh(x)^2 = 1 + \sinh(x)^2$ gilt, und damit $\cosh(x) = \sqrt{1+\sinh(x)^2}$ für $x \in \mathbb{R}$; dies werden wir bald benötigen. Nach dem Satz 9.3 über die Umkehrfunktion, wobei wir $\sinh'(x) = \cosh(x) \neq 0$ für $y \in \mathbb{R}$ benutzen, ist arsinh differenzierbar, die Ableitung ist für $y \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\operatorname{arsinh}'(y) = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh}(y))} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh(\operatorname{arsinh}(y))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}. \qquad \square$$

(iv) *Behauptung:* Es gilt $\operatorname{arsinh}(y) = \log(y + \sqrt{y^2+1})$ für $y \in \mathbb{R}$.

Beweis: Zuerst bemerken wir, dass wegen $y + \sqrt{y^2+1} > y + \sqrt{y^2} = y + |y| \geq 0$ die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto \log(y + \sqrt{y^2+1})$ tatsächlich wohldefiniert ist. Diese Funktion ist differenzierbar als Komposition differenzierbarer Funktionen. Wir berechnen die Ableitung als

$$f'(y) = \frac{1}{y + \sqrt{y^2+1}} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{y^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$$

für $y \in \mathbb{R}$. Zusammen mit Teil (iii) sehen wir, dass die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto f(y) - \operatorname{arsinh}(y)$ Ableitung konstant gleich 0 hat. Nach Vorlesung ist g Konstant. Wegen $\sinh(0) = 0$ gilt aber auch $g(0) = \log(0 + \sqrt{0^2+1}) - \operatorname{arsinh}(0) = 0 - 0$, sodass g konstant gleich 0 ist. Also ist $f = \operatorname{arsinh}$. □

Aufgabe 44:

(i) Beweisen Sie die folgende Ungleichung:

$$|\cos(\mathrm{e}^x) - \cos(\mathrm{e}^y)| \leq |x-y| \quad \text{für alle } x, y \leq 0.$$

(ii) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x\log(x)}{x^3+1}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x} - \frac{1}{\cosh(x)}\right)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 44:

(i) *Behauptung:* Für alle $x, y \leq 0$ gilt $|\cos(\mathrm{e}^x) - \cos(\mathrm{e}^y)| \leq |x-y|$.

Beweis: Definiere $f\colon (-\infty, 0] \to \mathbb{R},\ z \mapsto \cos(\mathrm{e}^z)$. f ist stetig auf $(-\infty, 0]$ und differenzierbar auf $(-\infty, 0)$, Es gilt für alle $z \in (-\infty, 0)$:

$$f'(z) = -\sin(\mathrm{e}^z)\cdot \mathrm{e}^z, \quad |f'(z)| \leq 1 \cdot \mathrm{e}^0 = 1.$$

Zu $x, y \leq 0$ existiert nach dem Mittelwertsatz ein ξ zwischen x und y mit

$$|\cos(\mathrm{e}^y) - \cos(\mathrm{e}^x)| = |f(y) - f(x)| = |f'(\xi)| \cdot |x-y| \leq 1 \cdot |x-y|.$$

□

(ii) (a) *Behauptung:* Es gilt $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x\log(x)}{x^3+1} = 0$.

Beweis: Wir setzen $f(x) := x^2 + x\log(x)$ und $g(x) := x^3 + 1$ für $x > 0$. Dann sind f und g zweimal differenzierbar mit

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x + \log(x) + x\cdot\frac{1}{x} = 2x + \log(x) + 1, & g'(x) &= 3x^2, \\ f''(x) &= 2 + \frac{1}{x}, & g''(x) &= 6x. \end{aligned}$$

Ferner existiert $\lim_{x\to\infty} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ (siehe unten) und es gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} g'(x) = \infty.$$

Damit erhalten wir durch zweifaches Anwenden der Regeln von de l'Hospital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x\log(x)}{x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x + \log(x) + 1}{3x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{6x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{3x} + \frac{1}{6x^2}\right) = 0.$$

□

(b) *Behauptung:* Es gilt $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x} - \frac{1}{\cosh(x)}\right) = -1$.

Beweis: Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x} - \frac{1}{\cosh(x)}\right) &= \frac{\cosh(x) - \mathrm{e}^x}{x\mathrm{e}^x \cosh(x)} = \frac{\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) - \mathrm{e}^x}{x\mathrm{e}^x \cosh(x)} = -\frac{\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})}{x\mathrm{e}^x \cosh(x)} = \frac{-\sinh(x)}{x\mathrm{e}^x \cosh(x)} \\ &= \frac{-1}{\mathrm{e}^x \cosh(x)} \cdot \frac{\sinh(x) - \sinh(0)}{x - 0} \xrightarrow{x\to 0} \frac{-1}{1 \cdot 1} \cdot \sinh'(0) = -\cosh(0) = -1,\end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass sinh differenzierbar ist mit $sinh' = cosh$. $\square$