Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

12. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2022/23

27. Januar 2023

Abgabe bis 3. Februar 2023, 13:00 Uhr

Aufgabe 45:

(i) Es sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) := \sqrt{x}$. Berechnen Sie das 3-te Taylorpolynom $T_3 f$ im Entwicklungspunkt 4.

(ii) Zeigen Sie die folgende Abschätzung:

$$\sqrt{1+x} \geq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad \text{für alle } x \in [0,\infty).$$

Aufgabe 46:

(i) Es sei $f\colon (-2,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) := \log(x+2)$. Berechnen Sie das 3-te Taylorpolynom $T_3 f$ zu f im Entwicklungspunkt 1 und zeigen Sie, dass gilt:

$$|(T_3 f)(x) - f(x)| < 0.02 \quad (x \in [0,2]).$$

(ii) Zeigen Sie, dass für den Tangens $\tan\colon \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ gilt: $\tan\left(\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right) = \mathbb{R}$. Zeigen Sie weiter, dass die Umkehrabbildung Arkustangens $\arctan\colon \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.

Aufgabe 47 (K):

(i) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \in C^1([a,b])$. Berechnen Sie die folgenden Integrale mithilfe des 1. Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, indem Sie jeweils eine Stammfunktion ermitteln.

(a) $\displaystyle\int_a^b f'(x) f(x)\, dx,$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{-9x^2+4x+5}{-6x^3+4x^2+10x+12}\, dx,$

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{2}{\cos^2(x)} + 4x\right) \mathrm{e}^{\tan(x)+x^2}\, dx,$

(d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi^2}{16}}^{\frac{\pi^2}{9}} \frac{\tan(\sqrt{x})}{\cos(\sqrt{x})\sqrt{x}}\, dx.$

(ii) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und f und f'' seien beschränkt. Beweisen Sie, dass dann auch f' beschränkt ist.

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Taylor.

Aufgabe 48:

Zeigen Sie mithilfe geeigneter Ober- und Untersummen die Existenz der folgenden Integrale und berechnen Sie mithilfe dieser Ober- und Untersummen den Wert der Integrale.

(i) $\displaystyle\int_0^1 x^3\, dx,$

(ii) $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{x}\, dx,$ wobei $a > 1$.

Hinweis zu (a): Sie dürfen ohne Beweis $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ verwenden.

Hinweis zu (b): Verwenden Sie die Zerlegung $Z := \{x_0, \cdots, x_n\}$ mit $x_j = a^{\frac{j}{n}},\ j = 0, \cdots, n$.

Informationen

Alle weiteren Informationen bezüglich der Themen **Übungsbetrieb**, **Scheinkriterien**, **Tutorien**, **Prüfung**, **Skript** und **Literaturhinweise** finden Sie auf der ILIAS-Seite der Vorlesung.

`https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_1896358&client_id=produktiv`

Übungsschein

Jede (K)-Aufgabe wird mit maximal 10 Punkten bewertet. Einen Übungsschein erhält, wer auf den Übungsblättern 1-7 und 8-14 **jeweils** mindestens 35 Punkte (50 % der möglichen Punktzahl) erzielt. Notwendig für den Erhalt des Übungsscheins ist eine Anmeldung im CAS-Portal. Diese ist ab sofort und noch bis zum **19.02.2023** möglich.