Karlsruher Institut für Technologie

**Institut für Analysis**
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

# 13. Übungsblatt

## Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2022/23

3. Februar 2023

**Abgabe bis 10. Februar 2023, 13:00 Uhr**

**Aufgabe 49:**

(i) Es seien $[a, b]$ und $[c, d]$ mit $a < b$ und $c < d$ zwei kompakte Intervalle und $\varphi, \psi \colon [a, b] \to [c, d]$ differenzierbar. Weiter sei $f \colon [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass die Funktion $G \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, definiert durch $G(x) := \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\, dt$, differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung $G'$.

(ii) Es sei $R > 0$ und die Funktion $f \colon [0, R] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) := \int_0^{x^2} \cos(\mathrm{e}^{t^2+1}) \log(t + 1)\, dt$. Zeigen Sie, dass $f$ differenzierbar ist und berechnen Sie deren Ableitung.

**Aufgabe 50 (K):**

(i) Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)\cos(x)}{1 + \sin^2(x)}\, dx,$ (b) $\displaystyle\int_0^1 x^5 \mathrm{e}^{-x^2}\, dx,$

(c) $\displaystyle\int_0^{4\pi} e^{-x} \cos(4x)\, dx,$ (d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x)}{1 - \sin(x)}\, dx.$

(ii) Die Funktionenfolge $f_n \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ sei definiert durch $f_n(x) := \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx^2}$. Untersuchen Sie, ob der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$ existiert und bestimmen Sie diesen gegebenenfalls.

**Aufgabe 51:**

(i) Es sei $f \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Zudem gelten

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 x f(x)\, dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^1 x^2 f(x)\, dx = 1.$$

Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in (0, 1)$ existiert mit $|f(x_0)| > 11$.

(ii) Die Funktionenfolge $f_n \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ sei definiert durch $f_n(x) := \frac{\sin(nx)}{1+nx}$. Untersuchen Sie, ob der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$ existiert.

(iii) Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{6 - 2x^3}}\, dx,$ (b) $\displaystyle\int_1^4 \arctan\left(\sqrt{\sqrt{x} - 1}\right) dx.$

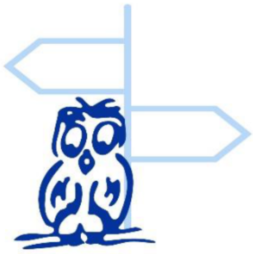
**Aufgabe 52:**

(i) Es sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion derart, dass das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ existiert. Zeigen Sie, dass dann $\lim\limits_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ gilt.

(ii) Wir betrachten die Funktion

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x}{1 + x^2}.$$

Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ nicht existiert, wohingegen der Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\, dx$ sehr wohl existiert.



**Orientierungsveranstaltung – Mit Schwung ins zweite Semester**

Du bist gerade im ersten Semester Mathematik oder Informatik und willst Tipps zu der kommenden Prüfungsphase und dem zweiten Semester? Dann komm einfach zur Orientierungsveranstaltung der Fachschaft Mathe/Info am

**14.02. um 17:30 Uhr in Raum -101 (Info) und -102 (Mathe) im Infobau (50.34)**.

Dort beantworten wir Fragen wie:
Wie bereite ich mich auf Klausuren vor? Was mache ich, wenn ich eine Klausur/einen Übungsschein nicht bestanden habe? Was mache im zweiten Semester? Welche Möglichkeiten zur Unterstützung gibt es?

Außerdem sind viele Fachschaftler anwesend, die dir weitere Fragen persönlich beantworten können.
Wir freuen uns auf dich!

# Informationen

Alle weiteren Informationen bezüglich der Themen **Übungsbetrieb**, **Scheinkriterien**, **Tutorien**, **Prüfung**, **Skript** und **Literaturhinweise** finden Sie auf der ILIAS-Seite der Vorlesung.

`https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_1896358&client_id=produktiv`

## Übungsschein

Jede (K)-Aufgabe wird mit maximal 10 Punkten bewertet. Einen Übungsschein erhält, wer auf den Übungsblättern 1-7 und 8-14 **jeweils** mindestens 35 Punkte (50 % der möglichen Punktzahl) erzielt. Notwendig für den Erhalt des Übungsscheins ist eine Anmeldung im CAS-Portal. Diese ist ab sofort und noch bis zum **19.02.2023** möglich.