Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

# Lösungsvorschlag zum 13. Übungsblatt

## Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2022/23

10. Februar 2023

**Aufgabe 49:**

(i) Es seien $[a,b]$ und $[c,d]$ mit $a<b$ und $c<d$ zwei kompakte Intervalle und $\varphi,\psi\colon [a,b]\to[c,d]$ differenzierbar. Weiter sei $f\colon [c,d]\to\mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass die Funktion $G\colon [a,b]\to\mathbb{R}$, definiert durch $G(x):=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt$, differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung $G'$.

(ii) Es sei $R>0$ und die Funktion $f\colon [0,R]\to\mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x):=\int_0^{x^2}\cos(\mathrm{e}^{t^2+1})\log(t+1)\,dt$. Zeigen Sie, dass $f$ differenzierbar ist und berechnen Sie deren Ableitung.

**Lösungsvorschlag zu Aufgabe 49:**

(i) *Behauptung:* Die Funktion $G$ ist differenzierbar mit Ableitung

$$G'(x)=f(\psi(x))\psi'(x)-f(\varphi(x))\varphi'(x)\quad (x\in[a,b]).$$

*Beweis:* Es sei $x_0\in[c,d]$. Die Funktion

$$F\colon [c,d]\to\mathbb{R},\quad F(x):=\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt,$$

ist nach dem zweiten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung differenzierbar auf $[c,d]$ mit $F'(x)=f(x)$ für alle $x\in[c,d]$, da der Integrand $f$ stetig ist. Wegen

$$\begin{aligned}G(x)&=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt=\int_{\varphi(x)}^{x_0} f(t)\,dt+\int_{x_0}^{\psi(x)} f(t)\,dt=\int_{x_0}^{\psi(x)} f(t)\,dt-\int_{x_0}^{\varphi(x)} f(t)\,dt\\&=F(\psi(x))-F(\varphi(x))\end{aligned}$$

folgt mit der Kettenregel

$$G'(x)=F'(\psi(x))\psi'(x)-F'(\varphi(x))\varphi'(x)=f(\psi(x))\psi'(x)-f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

$\square$

(ii) *Voraussetzung:* Für $R>0$ sei die Funktion $f\colon [0,R]\to\mathbb{R}$ gegeben durch $f(x):=\int_0^{x^2}\cos(\mathrm{e}^{t^2+1})\log(t+1)\,dt$.

*Behauptung:* $f$ ist differenzierbar mit $f'(x)=2x\cos\left(\mathrm{e}^{x^4+1}\right)\log(x^2+1)$ für $x\in[0,R]$.

*Beweis:* Definiere die stetige Funktion

$$g\colon [0,R^2]\to\mathbb{R},\quad g(x):=\cos(\mathrm{e}^{x^2+1})\log(x+1).$$

Mit den differenzierbaren Funktionen $\varphi(x):=0$ und $\psi(x):=x^2\in[0,R^2]$ für $x\in[0,R]$ ist $f$ gegeben durch $f(x):=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} g(t)\,dt$ ($x\in[0,R]$). Nach Aufgabenteil (i) ist $f$ differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned}f'(x)&=g(\psi(x))\psi'(x)-g(\varphi(x))\varphi'(x)=\cos\left(\mathrm{e}^{x^4+1}\right)\log(x^2+1)\cdot 2x+0\\&=2x\cos\left(\mathrm{e}^{x^4+1}\right)\log(x^2+1).\end{aligned}$$

$\square$

**Aufgabe 50 (K):**

(i) Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)\cos(x)}{1+\sin^2(x)}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_0^1 x^5 \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$,

(c) $\displaystyle\int_0^{4\pi} e^{-x}\cos(4x)\,dx$, (d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x)}{1-\sin(x)}\,dx$.

(ii) Die Funktionenfolge $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) sei definiert durch $f_n(x) := \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx^2}$. Untersuchen Sie, ob der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$ existiert und bestimmen Sie diesen gegebenenfalls.

**Lösungsvorschlag zu Aufgabe 50:**

(i) (a) *Behauptung:* Es gilt $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)\cos(x)}{1+\sin^2(x)}\,dx = \frac{1}{2}\log(2)$.

*Beweis:* Mit der Substitution $y = y(x) = \sin^2(x)$ gilt $y(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ und $dy = 2\sin(x)\cos(x)\,dx$. Damit erhalten wir

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)\cos(x)}{1+\sin^2(x)}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{1}{1+y}\,dy = \frac{1}{2}[\log(1+y)]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2}(\log(2)-\log(1)) = \frac{1}{2}\log(2).$$

Alternativ kann man auch direkt einsehen, dass $x \mapsto \frac{1}{2}\log(1+\sin^2(x))$ eine Stammfunktion des Integranden ist. $\square$

(b) *Behauptung:* Es gilt $\displaystyle\int_0^1 x^5\mathrm{e}^{-x^2}\,dx = 1 - \frac{5}{2\mathrm{e}}$.

*Beweis:* Mit zweimaliger partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^5\mathrm{e}^{-x^2}\,dx &= \int_0^1 x^4 x\mathrm{e}^{-x^2}\,dx \overset{(P.I.)}{=} \left[x^4\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x^2}\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 4x^3\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x^2}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} + \int_0^1 2x^2 x\mathrm{e}^{-x^2}\,dx \\
&\overset{(P.I.)}{=} -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} + \left[2x^2\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x^2}\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 4x\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x^2}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1} + \int_0^1 2x\mathrm{e}^{-x^2}\,dx = -\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-1} + \left[-\mathrm{e}^{-x^2}\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= -\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1} + 1 = -\frac{5}{2}\mathrm{e}^{-1} + 1.
\end{aligned}$$

$\square$

(c) *Behauptung:* Es gilt $\displaystyle\int_0^{4\pi} e^{-x}\cos(4x)\,dx = \frac{1}{17}\left(1-\mathrm{e}^{-4\pi}\right)$.

*Beweis:* Wir wenden zweimal partielle Integration an und erhalten

$$\begin{aligned}
I &:= \int_0^{4\pi} e^{-x}\cos(4x)\,dx \overset{(P.I.)}{=} \left[-\mathrm{e}^{-x}\cos(4x)\right]_{x=0}^{x=4\pi} - \int_0^{4\pi}\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)(-4\sin(4x))\,dx \\
&= -\mathrm{e}^{-4\pi}\underbrace{\cos(16\pi)}_{=1} + 1 - 4\int_0^{4\pi} \mathrm{e}^{-x}\sin(4x)\,dx \\
&\overset{(P.I.)}{=} 1 - \mathrm{e}^{-4\pi} - 4\left([-\mathrm{e}^{-x}\sin(4x)]_{x=0}^{x=4\pi} - \int_0^{4\pi} -\mathrm{e}^{-x}4\cos(4x)\,dx\right) \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-4\pi} - 4\left(-\mathrm{e}^{-4\pi}\underbrace{\sin(16\pi)}_{=0} + 0 + 4\int_0^{4\pi} \mathrm{e}^{-x}\cos(4x)\,dx\right) = 1 - \mathrm{e}^{-4\pi} - 16I.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$17I = 1 - \mathrm{e}^{-4\pi} \iff \int_0^{4\pi} e^{-x}\cos(4x)\,dx = I = \frac{1}{17}\big(1-\mathrm{e}^{-4\pi}\big).$$

$\square$

(d) *Behauptung:* Es gilt $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x)}{1-\sin(x)}\,dx = \log(2) - 2\log(\sqrt{2}-1) - \sqrt{2}.$

*Beweis:* Mithilfe der Additionstheoreme erhalten wir zunächst

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x)}{1-\sin(x)}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin(x)\cos(x)}{1-\sin(x)}\,dx.$$

Mit der Substitution $y = y(x) = \sin(x)$ gilt $y(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $dy = \cos(x)\,dx$. Damit gilt (beachten Sie, dass $\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)}$ für alle $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$):

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin(x)\cos(x)}{1-\sin(x)}\,dx &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{2y\sqrt{1-y^2}}{1-y}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{y}{1-y}\,dy \\
&= 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{1-y} - 1\right) dy = 2[-\log(1-y) - y]_{y=0}^{y=\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= 2\left(-\log\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} - 0\right) = -2\log\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2} \\
&= \log(2) - 2\log(\sqrt{2}-1) - \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

$\square$

(ii) *Voraussetzung:* Definiere $f_n(x) := \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx^2}$ für $x \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}$.

*Behauptung:* Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$.

*Beweis:* Es gilt $|f_n(x)| = \frac{1}{n}\underbrace{\mathrm{e}^{-nx^2}}_{\le 1} \le \frac{1}{n}$ für alle $x \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}$. Damit gilt

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| \le \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

d.h. $(f_n)$ konvergiert auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen 0. Nach Vorlesung (Satz 10.8) konvergiert damit auch die Folge der Integrale und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0.$$

$\square$

**Aufgabe 51:**

(i) Es sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Zudem gelten

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 xf(x)\,dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^1 x^2 f(x)\,dx = 1.$$

Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in (0,1)$ existiert mit $|f(x_0)| > 11$.

(ii) Die Funktionenfolge $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ sei definiert durch $f_n(x) := \frac{\sin(nx)}{1+nx}$. Untersuchen Sie, ob der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$ existiert.

(iii) Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{6-2x^3}}\,dx,$ (b) $\displaystyle\int_1^4 \arctan\Big(\sqrt{\sqrt{x}-1}\Big)\,dx.$

**Lösungsvorschlag zu Aufgabe 51:**

(i) *Voraussetzung:* Es sei $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Zudem gelten

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 xf(x)\,dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^1 x^2 f(x)\,dx = 1.$$

*Behauptung:* Ex existiert ein $x_0\in(0,1)$ mit $|f(x_0)|>11$.

*Beweis:* Angenommen die Behauptung ist falsch, dann gilt $|f(x)|\le 11$ für alle $x\in(0,1)$. Mit der Voraussetzung erhalten wir

$$(*) \qquad \int_0^1 f(x)\Big(x-\frac12\Big)^2 dx = \int_0^1 x^2 f(x)\,dx - \int_0^1 xf(x)\,dx + \frac14\int_0^1 f(x)\,dx = 1-0+\frac14\cdot 0 = 1.$$

Wir definieren nun

$$\tilde f\colon [0,1]\to\mathbb{R},\quad \tilde f(x) := \begin{cases} f(x), & x\in(0,1),\\ 0, & x\in\{0,1\}.\end{cases}$$

Dann gilt $\big|\tilde f(x)\big|\le 11$ für alle $x\in[0,1]$. Zudem stimmt $\tilde f$ außer an endlich vielen Stellen, nämlich bei 0 und 1, mit $f$ überein und ist somit nach Satz 10.16 ebenfalls integrierbar und die beiden Integrale stimmen überein. Weiter folgt mit $(*)$, der Monotonie des Integrals und dem 1. Hauptsatz:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1 f(x)\Big(x-\frac{x}{2}\Big)^2 dx \le \int_0^1 |f(x)|\Big(x-\frac12\Big)^2 dx = \int_0^1 \big|\tilde f(x)\big|\Big(x-\frac12\Big)^2 dx \\ &\le \int_0^1 11\Big(x-\frac12\Big)^2 dx = \left[\frac{11}{3}\Big(x-\frac12\Big)^3\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{11}{3}\Big(\frac18-\Big(-\frac18\Big)\Big) = \frac{11}{12} < 1, \end{aligned}$$

also ein Widerspruch. Folglich war die Annahme falsch und die Behauptung ist bewiesen. □

(ii) *Voraussetzung:* Definiere $f_n(x) := \frac{\sin(nx)}{1+nx}$ für $x\in[0,1]$ und $n\in\mathbb{N}$.

*Behauptung:* Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$.

*Beweis:* Für $n\in\mathbb{N}$ gilt mit der Dreiecksungleichung für Integrale

$$\begin{aligned} \left|\int_0^1 \frac{\sin(nx)}{1+nx}\,dx\right| &\le \int_0^1 \left|\frac{\sin(nx)}{1+nx}\right| dx \le \int_0^1 \frac{1}{1+nx}\,dx = \left[\frac1n\log(1+nx)\right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{\log(1+n)}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. □

(iii) (a) *Behauptung:* Es gilt $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{6-2x^3}}\,dx = \frac13(\sqrt6-2)$.

*Beweis:* Mit der Substitution $y=y(x)=6-2x^3$ gilt $y(0)=6,\ y(1)=4$ und $dy=-6x^2\,dx$. Damit erhalten wir

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{6-2x^3}}\,dx = \int_6^4 -\frac16\frac{1}{\sqrt y}\,dy = \int_4^6 \frac16\frac{1}{\sqrt y}\,dy = \left[\frac13\sqrt y\right]_{y=4}^{y=6} = \frac13\sqrt6-\frac13\sqrt4 = \frac13(\sqrt6-2).$$

Alternativ kann man auch direkt einsehen, dass $x\mapsto -\frac13\sqrt{6-2x^3}$ eine Stammfunktion des Integranden ist. □

(b) *Behauptung:* Es gilt $\int_1^4 \arctan\left(\sqrt{\sqrt{x}-1}\right) dx = \pi - \frac{4}{3}$.

*Beweis:* Mit der Substitution $y = y(x) = \sqrt{\sqrt{x}-1}$ ($\Leftrightarrow x = (y^2+1)^2$) gilt $y(1) = 0,\ y(4) = 1$ und $dy = \frac{1}{4y(y^2+1)}\, dx$. Damit erhalten wir

$$\int_1^4 \arctan\left(\sqrt{\sqrt{x}-1}\right) dx = \int_0^1 \arctan(y) \cdot 4y(y^2+1)\, dy = \int_0^1 (4y^3+4y) \arctan(y)\, dy.$$

Mit partieller Integration gilt nun

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (4y^3+4y)\arctan(y)\, dy &\overset{(P.I.)}{=} \left[(y^4+2y^2)\arctan(y)\right]_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 \frac{y^4+2y^2}{1+y^2}\, dy \\
&= 3\arctan(1) - \int_0^1 \left(\frac{y^2(1+y^2)}{1+y^2} + \frac{y^2}{1+y^2}\right) dy \\
&= \frac{3}{4}\pi - \int_0^1 y^2 dy - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+y^2}\right) dy \\
&= \frac{3}{4}\pi - \left[\frac{1}{3}y^3 + y - \arctan(y)\right]_{y=0}^{y=1} \\
&= \frac{3}{4}\pi - \left(\frac{1}{3} + 1 - \frac{\pi}{4}\right) + 0 = \pi - \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

$\square$

**Aufgabe 52:**

(i) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion derart, dass das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ existiert. Zeigen Sie, dass dann $\lim\limits_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ gilt.

(ii) Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x}{1+x^2}.$$

Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ nicht existiert, wohingegen der Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\, dx$ sehr wohl existiert.

**Lösungsvorschlag zu Aufgabe 52:**

(i) *Voraussetzung:* Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion derart, dass das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ existiert.

*Behauptung:* Dann existiert der Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$.

*Beweis:* Da das uneigentliche Integral konvergiert, gelten

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)\, dx = \int_0^\infty f(x)\, dx$$

und

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^0 f(x)\, dx = \int_{-\infty}^0 f(x)\, dx.$$

Es sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existieren ein $a_0 < 0$ und ein $b_0 > 0$ derart, dass

$$\left| \int_0^\infty f(x)\, dx - \int_0^b f(x)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $b \geq b_0$ und

$$\left| \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx - \int_{a}^{0} f(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $a \leq a_0$ erfüllt sind. Für alle $t \geq \max\{b_0, |a_0|\}$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx - \int_{-t}^{t} f(x)\,dx \right| &\leq \left| \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx - \int_{0}^{t} f(x)\,dx \right| + \left| \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx - \int_{-t}^{0} f(x)\,dx \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. □

(ii) *Voraussetzung:* Es sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \frac{x}{1+x^2}$.
*Behauptung:* Das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ existiert nicht, wohingegen der Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,dx$ sehr wohl existiert.

*Beweis:* Für $b > 0$ gilt

$$\int_{0}^{b} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_{x=0}^{x=b} = \frac{1}{2}\log(1+b^2) \xrightarrow{b\to\infty} \infty,$$

weshalb das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ nicht existiert. Für $t > 0$ gilt allerdings

$$\int_{-t}^{t} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_{x=-t}^{x=t} = \frac{1}{2}(\log(1+t^2) - \log(1+(-1)^2)) = 0 \xrightarrow{t\to\infty} 0,$$

d.h. es gilt $\lim\limits_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,dx = 0$. □