

## Lösungsvorschlag zum 14. Übungsblatt

### Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2022/23

17. Februar 2023

#### Aufgabe 53:

- (i) Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren oder divergieren. Beweisen Sie Ihre Behauptung:

(a)  $\int_2^4 \frac{\sin(x)}{(x-2)^{\frac{2}{3}}} dx,$

(b)  $\int_0^\infty e^{-x} \log(1+x) dx.$

- (ii) Bestimmen Sie alle  $z \in \mathbb{C}$ , welche die folgende Gleichung lösen.

$$e^z = \sqrt{12} + 2i.$$

- (iii) Es seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $p(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$  ( $z \in \mathbb{C}$ ) ein Polynom mit  $a_j \in \mathbb{R}$  für alle  $j \in \{0, \dots, n\}$ . Zeigen Sie: Ist  $z \in \mathbb{C}$  eine Nullstelle von  $p$ , so ist auch  $\bar{z}$  eine Nullstelle von  $p$ .

#### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 53:

- (i) (a) Behauptung: Das uneigentliche Integral  $\int_2^4 \frac{\sin(x)}{(x-2)^{\frac{2}{3}}} dx$  konvergiert.

Beweis: Definiere  $f(x) := \frac{\sin(x)}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}$  für  $x \in (2, 4]$ . Es gilt  $|f(x)| \leq \frac{1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}$  für alle  $x \in (2, 4]$ . Ferner gilt für  $a \in (2, 4)$

$$\int_a^4 \frac{1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}} dx = \left[ 3(x-2)^{\frac{1}{3}} \right]_{x=a}^{x=4} = 3 \left( 2^{\frac{1}{3}} - (a-2)^{\frac{1}{3}} \right) \xrightarrow{a \rightarrow 2} 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}},$$

d.h. das uneigentliche Integral  $\int_2^4 \frac{1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}} dx$  konvergiert. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert also auch das uneigentliche Integral  $\int_2^4 f(x) dx$ . □

- (b) Behauptung: Das uneigentliche Integral  $\int_0^\infty e^{-x} \log(1+x) dx$  konvergiert.

Beweis: Für alle  $x \geq 0$  gilt

$$1+x \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Da der Logarithmus monoton wächst, folgt  $\log(1+x) \leq x$ , also  $|e^{-x} \log(1+x)| \leq x e^{-x}$  für alle  $x \geq 0$ . Das uneigentliche Integral  $\int_0^\infty x e^{-x} dx$  konvergiert, denn mit partieller Integration folgt für  $R > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^R x e^{-x} dx &= [x(-e^{-x})]_{x=0}^{x=R} - \int_0^R 1(-e^{-x}) dx = -R e^{-R} + [-e^{-x}]_{x=0}^{x=R} \\ &= -R e^{-R} - e^{-R} + 1 = -\frac{R}{e^R} - e^{-R} + 1 \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 1. \end{aligned}$$

Mit dem Majorantenkriterium konvergiert also auch  $\int_0^\infty e^{-x} \log(1+x) dx$ . □

- (ii) Behauptung: Die Lösungsmenge der Gleichung  $e^z = \sqrt{12} + 2i$  ist gegeben durch  $\{\log(4) + \frac{\pi}{6}i + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$ .

Beweis: Wir schreiben  $\sqrt{12} + 2i$  in Polarkoordinaten um: Es gilt  $|\sqrt{12} + 2i| = \sqrt{12 + 4} = 4$ . Wir bestimmen  $\varphi \in (-\pi, \pi]$ , sodass gilt

$$\sqrt{12} + 2i = 4e^{i\varphi} = 4\cos(\varphi) + 4i\sin(\varphi),$$

d.h. es gilt  $\cos(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  und  $\sin(\varphi) = \frac{1}{2}$ . Mit dem Hinweis aus A55 und den Eigenschaften von Sinus und Kosinus folgt  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ . Es gilt also  $\sqrt{12} + 2i = 4e^{\frac{\pi}{6}i}$ . Die Lösungen der Gleichung  $e^z = \sqrt{12} + 2i$  sind also gerade die Logarithmen von  $4e^{\frac{\pi}{6}i}$ , d.h.

$$\left\{ \log(4) + \frac{\pi}{6}i + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

□

(iii) Voraussetzung: Es seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $p(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$  ( $z \in \mathbb{C}$ ) ein Polynom mit  $a_j \in \mathbb{R}$  für alle  $j \in \{0, \dots, n\}$ .

Behauptung: Ist  $z \in \mathbb{C}$  eine Nullstelle von  $p$ , so ist auch  $\bar{z}$  eine Nullstelle von  $p$ .

Beweis: Es sei  $z \in \mathbb{C}$  eine Nullstelle von  $p$ , d.h. es gelte  $p(z) = 0$ . Da alle Koeffizienten von  $p$  reell sind gilt

$$0 = \bar{0} = \overline{p(z)} = \sum_{j=0}^n \overline{a_j z^j} = \sum_{j=0}^n \overline{a_j} \overline{z^j} = \sum_{j=0}^n a_j \bar{z}^j = p(\bar{z}).$$

□

#### Aufgabe 54 (K):

(i) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale jeweils auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Werte.

(a)  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|} dx,$

(b)  $\int_0^{\infty} e^{sx} \cos(tx) dx, \quad s < 0, t \in \mathbb{R}.$

(ii) Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren oder divergieren. Beweisen Sie Ihre Behauptung.

(a)  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx,$

(b)  $\int_2^{\infty} \frac{\log(x)}{x} dx.$

(iii) Bestimmen Sie alle  $z \in \mathbb{C}$ , welche die folgende Gleichung lösen:

$$z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$$

#### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 54:

(i) (a) Behauptung: Das uneigentliche Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|} dx$  konvergiert und es gilt  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|} dx = 1$ .

Beweis: Es seien  $a < 0 < b$ . Dann gilt

$$\int_a^0 e^{-2|x|} dx = \int_a^0 e^{2x} dx = \left[ \frac{1}{2} e^{2x} \right]_{x=a}^{x=0} = \frac{1}{2} (1 - e^{2a}) \xrightarrow{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}$$

sowie

$$\int_0^b e^{-2|x|} dx = \int_0^b e^{-2x} dx = \left[ -\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_{x=0}^{x=b} = \frac{1}{2} (1 - e^{-2b}) \xrightarrow{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2}.$$

Also existiert das uneigentliche Integral und es gilt  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|} dx = 1$ . □

(b) Behauptung: Das uneigentliche Integral  $\int_0^{\infty} e^{sx} \cos(tx) dx$  konvergiert für alle  $s, t \in \mathbb{R}$  mit  $s < 0$  und es gilt  $\int_0^{\infty} e^{sx} \cos(tx) dx = -\frac{s}{s^2 + t^2}$ .

Beweis: Es seien  $s, t \in \mathbb{R}$  mit  $s < 0$ . Mit zweifacher partieller Integration erhalten wir für jedes  $R > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^R e^{sx} \cos(tx) dx &\stackrel{(P.I.)}{=} \left[ \frac{e^{sx}}{s} \cos(tx) \right]_{x=0}^{x=R} + \int_0^R \frac{e^{sx}}{s} t \sin(tx) dx \\ &\stackrel{(P.I.)}{=} \frac{e^{Rs}}{s} \cos(Rt) - \frac{1}{s} + \left[ \frac{e^{sx}}{s^2} t \sin(tx) \right]_{x=0}^R - \int_0^R \frac{e^{sx}}{s^2} t^2 \cos(tx) dx \\ &= \frac{e^{Rs}}{s} \cos(Rt) - \frac{1}{s} + \frac{e^{Rs}}{s^2} t \sin(Rt) - \frac{t^2}{s^2} \int_0^R e^{sx} \cos(tx) dx. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also

$$\left(1 + \frac{t^2}{s^2}\right) \int_0^R e^{sx} \cos(tx) dx = \frac{e^{Rs}}{s} \cos(Rt) - \frac{1}{s} + \frac{e^{Rs}}{s^2} t \sin(Rt) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} -\frac{1}{s},$$

da nach Voraussetzung  $s < 0$  und damit  $e^{sR} \rightarrow 0$  ( $R \rightarrow \infty$ ) und  $\sin$  und  $\cos$  beschränkt sind. Somit konvergiert das Integral mit

$$\int_0^\infty e^{sx} \cos(tx) dx = -\frac{1}{s} \left(1 + \frac{t^2}{s^2}\right)^{-1} = -\frac{1}{s} \left(\frac{s^2}{s^2 + t^2}\right) = -\frac{s}{s^2 + t^2}.$$

□

(ii) (a) Behauptung: Das uneigentliche Integral  $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$  konvergiert.

Beweis: Für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| \geq 1$  gilt  $x^2 \geq |x|$  und damit auch  $e^{-x^2} \leq e^{-|x|}$ . Ferner gilt für  $a < -1$  und  $b > 1$

$$\int_a^{-1} e^{-|x|} dx = [e^x]_{x=a}^{x=-1} = \frac{1}{e} - e^a \xrightarrow{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{e}$$

sowie

$$\int_1^b e^{-|x|} dx = [-e^{-x}]_{x=1}^{x=b} = -e^{-b} + \frac{1}{e} \xrightarrow{b \rightarrow \infty} \frac{1}{e}.$$

Nach dem Majorantenkriterium konvergieren daher die uneigentlichen Integrale  $\int_{-\infty}^{-1} e^{-x^2} dx$  und  $\int_1^\infty e^{-x^2} dx$ . Darüber hinaus existiert auch das Riemann-Integral  $\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx$  (stetiger Integrand auf kompaktem Intervall). Somit konvergiert das uneigentliche Integral  $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$ . □

(b) Behauptung: Das uneigentliche Integral  $\int_2^\infty \frac{\log(x)}{x} dx$  divergiert.

Beweis: Für  $R > 2$  gilt

$$\int_2^R \frac{\log(x)}{x} dx = \left[ \frac{1}{2} \log^2(x) \right]_{x=2}^{x=R} = \frac{1}{2} \log^2(R) - \frac{1}{2} \log^2(2) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \infty,$$

d.h. das uneigentliche Integral divergiert. □

(iii) Behauptung: Die Lösungsmenge der Gleichung  $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$  ist gegeben durch  $\{1, -1 \pm 2i\}$ .

Beweis: Für  $z \in \mathbb{C}$  mit  $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) gilt

$$\begin{aligned} z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0 &\iff (x + iy)^2 - 2(x - iy) + 1 = 0 \\ &\iff x^2 - y^2 + 2xyi - 2x + 2yi + 1 = 0 \\ &\iff x^2 - y^2 - 2x + 1 + i(2xy + 2y) = 0 \\ &\iff x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0 \quad \wedge \quad 2xy + 2y = 0 \end{aligned}$$

$$\iff (x-1)^2 - y^2 = 0 \quad \wedge \quad y(x+1) = 0.$$

Letztere ist für  $y = 0$  oder für  $x = -1$  erfüllt. Im Fall  $y = 0$  erhalten wir durch die erste Gleichung

$$(x-1)^2 = 0 \iff |x-1| = 0 \iff x = 1.$$

Im Fall  $x = -1$  gilt

$$(-1-1)^2 - y^2 = 0 \iff y^2 = 4 \iff |y| = 2 \iff y = -2 \vee y = 2.$$

Somit erhalten wir  $z = 1$ ,  $z = -1 - 2i$  und  $z = -1 + 2i$  als Lösungen der Gleichung. □

### Aufgabe 55:

(i) Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene.

(a)  $D_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z + 2 + i| = |z - i|\}$ ,      (b)  $D_2 := \{z \in \mathbb{C} : 1 < \operatorname{Im}(iz) < 2\}$ .

(ii) Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag der folgenden komplexen Zahlen.

(a)  $z_1 := \frac{3 + 5i}{2 - i}$ ,      (b)  $z_2 := \frac{1}{(1 + i)^2}$ ,

(c)  $z_3 := (1 - i\sqrt{3})^{3n}$  für  $n \in \mathbb{N}$ ,      (d)  $z_4 := \sum_{k=0}^{26} (2i)^k$ .

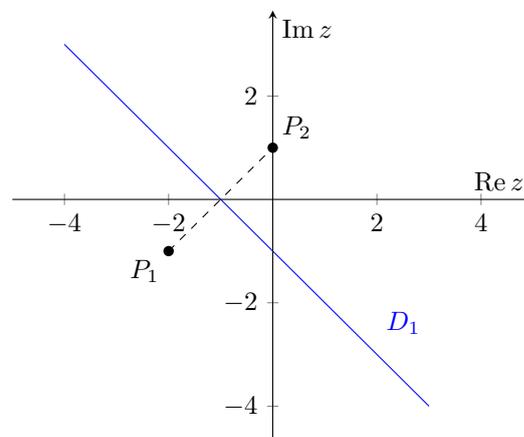
*Hinweis zu c):* Sie dürfen verwenden, dass  $\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  und  $\cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$  gilt.

### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 55:

(i) (a) Setze  $P_1 := -2 - i$  und  $P_2 := i$ . Dann gilt

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - P_1| = |z - P_2|\},$$

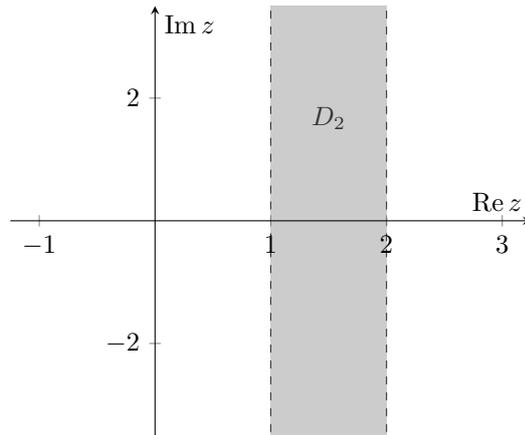
d.h.  $D_1$  enthält all jene Punkte, welche von  $P_1$  und  $P_2$  denselben Abstand haben. Es handelt sich bei  $D_1$  also um eine Gerade in der komplexen Zahlenebene.



(b) Für  $z \in \mathbb{C}$  mit  $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) gilt  $iz = -y + ix$ . Damit folgt

$$D_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < \operatorname{Re}(z) < 2\}$$

und die Menge  $D_2$  kann in der komplexen Zahlenebene wie folgt dargestellt werden.



- (ii) (a) Behauptung: Es gilt  $\operatorname{Re}(z_1) = \frac{1}{5}$ ,  $\operatorname{Im}(z_1) = \frac{13}{5}$  und  $|z_1| = \frac{\sqrt{170}}{5}$ .

Beweis: Es gilt

$$z_1 = \frac{3 + 5i}{2 - i} \cdot \frac{2 + i}{2 + i} = \frac{6 + 13i - 5}{4 + 1} = \frac{1}{5} + \frac{13}{5}i.$$

Daraus folgt:  $\operatorname{Re}(z_1) = \frac{1}{5}$  und  $\operatorname{Im}(z_1) = \frac{13}{5}$ . Weiter gilt

$$|z_1| = \sqrt{\operatorname{Re}(z_1)^2 + \operatorname{Im}(z_1)^2} = \sqrt{\frac{1 + 169}{25}} = \frac{\sqrt{170}}{5}.$$

□

- (b) Behauptung: Es gilt  $\operatorname{Re}(z_2) = 0$ ,  $\operatorname{Im}(z_2) = -\frac{1}{2}$  und  $|z_2| = \frac{1}{2}$ .

Beweis: Es gilt

$$z_2 = \frac{1}{(1 + i)^2} = \frac{1}{1 + 2i - 1} = \frac{1}{2i} \cdot \frac{i}{i} = -\frac{1}{2}i,$$

woraus sich die Behauptung direkt ablesen lässt.

□

- (c) Behauptung: Für  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\operatorname{Re}(z_3) = (-1)^n 2^{3n}$ ,  $\operatorname{Im}(z_3) = 0$  und  $|z_3| = 2^{3n}$ .

Beweis: Wir bestimmen zunächst die Polarkoordinatendarstellung von  $1 - i\sqrt{3}$ : Es gilt  $|1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1 + 3} = 2$ . Wir bestimmen nun ein  $\varphi \in (-\pi, \pi]$ , sodass folgende Gleichung erfüllt ist:

$$1 - i\sqrt{3} \stackrel{!}{=} 2e^{i\varphi} = 2 \cos(\varphi) + 2i \sin(\varphi).$$

Durch Vergleichen der Real- und Imaginärteile sehen wir, dass dies genau dann der Fall ist, wenn  $\cos(\varphi) = \frac{1}{2}$  und  $\sin(\varphi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Nach dem Hinweis ist dies für  $\varphi = -\frac{\pi}{3}$  der Fall. Damit folgt (für  $n \in \mathbb{N}$ )

$$(1 - i\sqrt{3})^{3n} = (2e^{-\frac{\pi}{3}i})^{3n} = 2^{3n} e^{-i\pi n} = 2^{3n} \cos(\pi n) = (-1)^n 2^{3n},$$

woraus die Behauptung folgt.

□

- (d) Behauptung: Es gilt  $\operatorname{Re}(z_4) = \frac{1-2^{28}}{5}$ ,  $\operatorname{Im}(z_4) = \frac{2+2^{27}}{5}$  und  $|z_4| = \sqrt{\frac{1+2^{54}}{5}}$ .

Beweis: Es gilt mit der geometrischen Summenformel

$$z_4 = \sum_{k=0}^{26} (2i)^k = \frac{1 - (2i)^{27}}{1 - 2i} = \frac{1 + 2^{27}i}{1 - 2i} \cdot \frac{1 + 2i}{1 + 2i} = \frac{1 - 2^{28}}{5} + \frac{2 + 2^{27}}{5}i,$$

woraus sich der Real- und Imaginärteil ablesen lassen. Weiter gilt

$$|z_4| = \sqrt{\frac{(1 - 2^{28})^2 + (2 + 2^{27})^2}{25}} = \sqrt{\frac{1 - 2^{29} + 2^{56} + 2^2 + 2^{29} + 2^{54}}{5^2}} = \sqrt{\frac{5 + 2^{56} + 2^{54}}{5^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{5 + 5 \cdot 2^{54}}{5^2}} = \sqrt{\frac{1 + 2^{54}}{5}}.$$

□

### Aufgabe 56:

Die  $2\pi$ -periodische Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist durch  $f(x) = |x|^3$  für  $x \in (-\pi, \pi]$  definiert. Berechnen Sie die Fourierreihe von  $f$ .

### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 56:

Behauptung: Die Fourierreihe von  $f$  ist gegeben durch

$$\frac{\pi^3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{6\pi}{n^2} (-1)^n + \frac{12}{n^4 \pi} (1 - (-1)^n) \right) \cos(nx).$$

Beweis: Für  $x \in [0, \pi]$  gilt  $f(-x) = |-x|^3 = |x|^3 = f(x)$ , d.h.  $f$  ist gerade. Nach Vorlesung gilt daher  $b_n = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Weiter berechnen wir

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^3 dx = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{4} x^4 \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2} \pi^3.$$

Weiter gilt für  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^3 \cos(nx) dx \stackrel{(P.I.)}{=} \frac{2}{\pi} \left( \underbrace{\left[ x^3 \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi}}_{=0} - \int_0^{\pi} 3x^2 \frac{\sin(nx)}{n} dx \right) \\ &\stackrel{(P.I.)}{=} -\frac{6}{n\pi} \left( \left[ x^2 \left( -\frac{\cos(nx)}{n} \right) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \left( -\frac{\cos(nx)}{n} \right) dx \right) \\ &= -\frac{6}{n^2 \pi} \left( -(-1)^n \pi^2 + 2 \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx \right) \\ &\stackrel{(P.I.)}{=} -\frac{6}{n^2 \pi} \left( -(-1)^n \pi^2 + 2 \left( \underbrace{\left[ x \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi}}_{=0} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n} dx \right) \right) \\ &= -\frac{6}{n^2 \pi} \left( -(-1)^n \pi^2 - \frac{2}{n} \left[ -\frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} \right) = -\frac{6}{n^2 \pi} \left( -(-1)^n \pi^2 + \frac{2}{n^2} ((-1)^n - 1) \right) \\ &= \frac{6\pi}{n^2} (-1)^n + \frac{12}{n^4 \pi} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} \frac{6\pi}{n^2}, & n \text{ gerade,} \\ \frac{24}{n^4 \pi} - \frac{6\pi}{n^2}, & n \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Für die Fourierreihe von  $f$  ergibt sich also

$$\begin{aligned} &\frac{\pi^3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{6\pi}{n^2} (-1)^n + \frac{12}{n^4 \pi} (1 - (-1)^n) \right) \cos(nx) \\ &= \frac{\pi^3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3\pi}{2k^2} \cos(2kx) + \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{24}{(2k+1)^4 \pi} - \frac{6\pi}{(2k+1)^2} \right) \cos((2k+1)x). \end{aligned}$$

□