Übung (25.10.22)

Aussagen und logische Verknüpfungen

Definition (Mathematische Aussage)

Eine Aussage im mathematischen Sinn ist eine Feststellung, deren Wahrheitsgehalt stets mit „wahr" oder „falsch" angegeben werden kann.

Bsp.:
- 2 ist eine gerade Zahl — Aussage (wahr)
- $1 = 2$ — Aussage (falsch)
- 8 ist eine Primzahl — Aussage (falsch)
- $x^3 + 1$ — keine Aussage

Logische Operationen für zwei Aussagen A und B:

Bezeichnung	Symbol	Bedeutung
1. Negation	$\neg A$	„nicht A"
2. Konjunktion (und)	$A \wedge B$	„A und B"
3. Disjunktion (oder)	$A \vee B$	„A oder B"
4. Implikation (Folgerung)	$A \Rightarrow B$	„aus A folgt B"
5. Äquivalenz (genau dann, wenn)	$A \Leftrightarrow B$	„A und B sind äquivalent" (d.h. es gilt $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$)

⇝ werden über Wahrheitstafeln definiert

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Bemerkung: Es seien A und B zwei math. Aussagen und es gelte $A \Rightarrow B$. Dann heißt A hinreichende Bedingung für B und B notwendige Bedingung für A.

Bsp.:

1) Negation von $\underbrace{1 = 2}_{\text{falsch}}$: $\neg(1 = 2) \Leftrightarrow 1 \neq 2$ wahr

2) Konjunktion: $\underbrace{(11 \text{ ist eine Primzahl})}_{\text{wahr}} \wedge \underbrace{(2 < 1)}_{\text{falsch}}$ falsch

3) Disjunktion: $(11 \text{ ist eine Primzahl}) \vee (2 < 1)$ wahr

wahr, falsch

4) Implikation: $1 = \sqrt{1} \Rightarrow 3 = \sqrt{9}$ wahr

$2 = \sqrt{4} \Rightarrow 3 = \sqrt{10}$ falsch

$1 = 2 \Rightarrow 11$ ist eine Primzahl wahr

$1 = 2 \Rightarrow 8$ ist eine Primzahl wahr

<u>Satz</u> (De Morgan'sche Regeln)

Es seien A, B beliebige Aussagen. Dann gelten:

a) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$

b) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$

<u>Satz:</u>

Es seien A, B bel. Aussagen. Dann gelten:

a) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

b) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$

c) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$

<u>Bew.:</u>

a) mit Wahrheitstafeln:

A	B	$\neg A$	$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$
w	w	f	w	w
w	f	f	f	f
f	w	w	w	w
f	f	w	w	w

b) <u>Beh.:</u> $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$

<u>Bew.:</u>

Es gilt: $A \Rightarrow B \overset{a)}{\Leftrightarrow} \neg A \vee B$

$\Leftrightarrow B \vee \neg A$

$\Leftrightarrow \neg(\neg B) \vee \neg A$

$\overset{a)}{\Leftrightarrow} (\neg B) \Rightarrow (\neg A)$

c) <u>Beh.:</u> $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$

<u>Bew.:</u>

Es gilt: $\neg(A \Rightarrow B) \overset{a)}{\Leftrightarrow} \neg(\neg A \vee B)$

$\overset{\text{De Morgan}}{\Leftrightarrow} \neg(\neg A) \wedge \neg B$

$\Leftrightarrow A \wedge (\neg B)$.

<u>Notationen:</u>

- Summen / Produkte: Es seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := \underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}_{n \text{ Summanden}} \qquad 1+2+3+4 = \sum_{i=1}^{4} i$$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i := \underbrace{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}_{n \text{ Faktoren}} \qquad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = \prod_{i=1}^{4} i$$

- Quantoren:

<u>Definition</u> (Existenz- / Allquantor)

1) Existenzaussagen sind Aussagen, die mit „Es gibt" beginnen. Statt „Es gibt" schreibt man $\exists$ (Existenzquantor)
2) Allaussagen sind Aussagen, die mit „Für alle ... gilt" beginnen. Anstatt „Für alle ... gilt" schreibt man $\forall$ (Allquantor)

<u>Bsp.:</u>

1) Es gibt eine reelle Zahl x mit der Eigenschaft $x < 0$
   $\exists x \in \mathbb{R}: x < 0$ wahr
2) Es gibt eine reelle Zahl y mit $y^2 < 0$
   $\exists y \in \mathbb{R}: y^2 < 0$ falsch
3) Für alle reellen Zahlen y gilt $y^2 \geq 0$
   $\forall y \in \mathbb{R}: y^2 \geq 0$ wahr
4) Zu jeder reellen Zahl x gibt es eine Zahl y mit $y > x$
   $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}: y > x$ wahr
   Reihenfolge wichtig!
5) Es gibt eine reelle Zahl y, die echt größer ist als alle reellen Zahlen.
   $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}: y > x$ falsch

Satz (Verneinung von Existenz- und Allaussagen)

Es sei $A(x)$ eine Aussage, die von x abhängt. Dann gelten:

a) $\neg(\exists x: A(x)) \iff \forall x: \neg A(x)$

b) $\neg(\forall x: A(x)) \iff \exists x: \neg A(x)$

Mengenlehre

Definition (Menge, Element)

Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte zu einem Ganzen. Die Objekte nennt man Elemente der Menge. Ist M eine Menge und x ein Element von M, so schreibt man $x \in M$.

Bsp.:

- $\{1,2,7\} = \{7,2,1\}$ Reihenfolge egal!
- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$
- $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist gerade}\}$
- $\{\} =: \emptyset$ leere Menge

Def. (Teilmenge)

Eine Menge A ist Teilmenge der Menge B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist. Schreibe dann

$$A \subseteq B \iff \forall x \in A: x \in B.$$

Def. (Vereinigung, Schnitt, Komplement)

Es seien A, B Mengen. Wir definieren

1) die Vereinigung von A und B durch

$$A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

2) den Schnitt von A und B durch

$$A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

3) das relative Komplement von A in B durch

$$B \setminus A := \{x : x \in B \wedge x \notin A\}$$

„B ohne A"

Bsp.: $A := \{-1, 2, 7, 10\}$, $B := \{-2, -1, 7\}$.

Dann gelten:

$A \cup B = \{-2, -1, 2, 7, 10\}$

$A \cap B = \{-1, 7\}$

$B \setminus A = \{-2\}$